Exercice 1. Parmi les applications suivantes, déterminer lesquelles sont linéaires sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + x\\
&f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b \quad (\text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2\,)\\
&f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}\\
&f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (-y, 3x+2y)\\
&f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}z\\
&f_6 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto 2\bar{z}+1\\
&f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 2x+3y\\
&f_8 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x-y, z+1)\\
&f_9 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \operatorname{trace}(A) = a_{11} + a_{22}\\
&f_{10} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ A \mapsto 2\,{}^tA - A\\
&f_{11} : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(1)\\
&f_{12} : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]\ ,\ P \mapsto P'' + 2P
\end{aligned}$$

Les applications f_3, f_5, f_6 sont elles $\mathbb{C}$-linéaires ?

Exercice 2. Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+2y, z-x, x+4y+z).$$

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
(b) Trouver une base de $\operatorname{Ker}(f)$.
(c) Trouver une base de $\operatorname{Im}(f)$.
(d) Calculer $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

Exercice 3. Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(v) = (x-z, 2x+y-3z, -y+2z)$$

et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(a) Montrer que f est linéaire.
(b) Calculer les coordonnées $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.
(c) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 4. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f((1,2)) = (1,0,1)$ et $f((2,1)) = (0,2,1)$.
(a) Déterminer $f((3,3))$.
(b) Déterminer $f((x,y))$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(c) Déterminer le noyau de f et son image.

Exercice 5. Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(v) = (-2x+y+z, x-2y+z).$$

(a) Montrer que f est linéaire.
(b) Donner une base de $\operatorname{Ker} f$, en déduire $\dim \operatorname{Im} f$.
(c) Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 6. Pour tout paramètre m réel, soit l'application $f_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f_m(x,y) = (mx-y, x-my, (2+m)x-(2m+1)y).$$

(a) Montrer que, pour tout m, f_m est une application linéaire.
(b) Pour quelles valeurs de m, f_m est-elle injective ?
(c) Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f_m)$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par

$$f(x,y,z,t) = (x-y+z, 0, x+y-z+t, t)$$

et soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z-t = 0\}$.
(a) Donner une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et sa dimension.
(b) Donner une base (la plus simple) de $\operatorname{Im}(f)$ et sa dimension.
(c) A-t-on $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^4$?
(d) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et donner en une base et sa dimension.
(e) A-t-on $\operatorname{Ker}(f) \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Exercice 8. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On suppose que l'image de la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{aligned}
f(v_1) &= -7v_1 - 6v_2\\
f(v_2) &= 8v_1 + 7v_2\\
f(v_3) &= 6v_1 + 6v_2 - v_3
\end{aligned}$$

(a) Pour tout vecteur $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$ déterminer $f \circ f(v)$.
(b) En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer f^{-1}.

Exercice 9. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3\\
f(e_2) &= \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3\\
f(e_3) &= \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3
\end{aligned}$$

Soit $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = v\}$ et $E_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = -v\}$.

(a) Montrer que E_1 et E_{-1} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(b) Montrer que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1 et que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1}.

(c) Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_1 et de E_{-1} ?

(d) Déterminer $E_1 \cap E_{-1}$.

(e) A-t-on $E_1 \oplus E_{-1} = \mathbb{R}^3$?

(f) Calculer $f \circ f$ et en déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P(2).$$

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 11. Soient a, b deux réels distincts et $f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X],\ f(P)(X) = XP(a) + P(b).$$

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base.

(c) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base.

Exercice 12. Soit f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$.

Exercice 13. Soit f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

(a) Comparer $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Ker}(f+g)$.

(b) Comparer $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ et $\mathrm{Im}(f+g)$.

(c) Comparer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f^2$.

(d) Comparer $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f^2$.

Exercice 14. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer

(a) $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\} \iff \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.

(b) $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f \iff \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$.

Exercice 15. Soit f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $f \circ g = \mathrm{Id}$. Montrer

(a) $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

(b) $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}(g \circ f)$.

(c) $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.

Exercice 16. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer que p est un projecteur si, et seulement si, $\mathrm{Id} - p$ l'est.

(b) Exprimer alors $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$ en fonction de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs. Montrer qu'on a équivalence entre

(a) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$;

(b) $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q$.

Exercice 18. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E qui commutent.

(a) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E.

(b) Monter que $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$ et $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.

Exercice 19. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit s un endomorphisme de E tel que $s^2 = \mathrm{Id}$. On pose $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.

(a) Montrer que $F \oplus G = E$.

(b) Montrer que s est la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G.

Exercice 20. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les parties E et F définies par

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Vect}((1,0,0,1),(1,0,1,0)) \\ F &= \{(x,y,z,t) \mid 2z + t = 0 \text{ et } z - 3t = 0\}. \end{aligned}$$

(a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et qu'ils sont supplémentaires.

(b) Soit (x,y,z,t) un élément quelconque de $\mathbb{R}^4$. Donner son image par le projecteur sur E parallèlement à F, puis son image par le projecteur sur F parallèlement à E.

(c) Déduire de ce qui précède l'image de (x,y,z,t) de $\mathbb{R}^4$ par la symétrie vectorielle par rapport à F, parallèlement à E.

Exercice 21. On considère les applications linéaires p et q de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ données pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= (-y - z, -x - z, x + y + 3z) \\ q(x,y,z) &= (x - 2y, -y, -2x + 2y - z). \end{aligned}$$

(a) Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F, G de $\mathbb{R}^3$ tels que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et tels que p est le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer F et G.

(b) Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels H, L de $\mathbb{R}^3$ tels que $H \oplus L = \mathbb{R}$ et tels que q est la symétrie vectorielle par rapport à H, parallèlement à L. Déterminer H et L.

Exercice 22. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(a) $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(b) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

(c) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Exercice 23. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Montrer

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f \iff f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg}(f).$$

Exercice 24. (CPU) Soit E l'espace des suites réelles convergentes. Soit l'application $f : E \to E$ qui à chaque suite (u_n) de E associe la suite de terme général

$$f(u_n) = u_n - u$$

où $u = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

(a) Montrer que f est un projecteur de E

(b) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$;

(c) Soit E_0 le sous-espace vectoriel des suites qui convergent vers 0.

Déterminer un sous-espace supplémentaire à E_0 dans E. Donner sa dimension.

Exercice 25. (CPU) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

(a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

(b) Montrer que $f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 26. (CPU) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Établir :

(a) $\dim \mathrm{Ker}(f \circ g) \leq \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Ker}(g)$.

(b) $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rang}(f) - \mathrm{rang}(g \circ f)$.

(c) $\mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g) - \dim E \leq \mathrm{rang}(f \circ g) \leq \min(\mathrm{rang}(f), \mathrm{rang}(g))$.

Exercice 27. (CPU) Soient E, F deux espaces vectoriel de dimensions finies et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(f + g) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g))$.

(appliquer le théorème du rang à $h = f_{|\,\mathrm{Ker}(f+g)}$)

Exercice 28. (CPU) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant

$$f^2 - 3f + 2\mathrm{Id} = 0.$$

(a) Montrer que f est un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f.

(b) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.