**Exercice 1.** Parmi les applications suivantes, déterminer lesquelles sont linéaires sur $\mathbb{R}$.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + x$$
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b \quad (\text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2\ )$$
$$f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}$$
$$f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (-y, 3x+2y)$$
$$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}z$$
$$f_6 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto 2\bar{z} + 1$$
$$f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 2x + 3y$$
$$f_8 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x-y, z+1)$$
$$f_9 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \mathrm{trace}(A) = a_{11} + a_{22}$$
$$f_{10} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ A \mapsto 2\,{}^tA - A$$
$$f_{11} : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(1)$$
$$f_{12} : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]\ ,\ P \mapsto P'' + 2P$$

Les applications $f_3$, $f_5$, $f_6$ sont elles $\mathbb{C}$-linéaires ?

*Solution de l'exercice 1.* $f_1$ n'est pas linéaire : $f_1(1+1) = f(2) = 6$, mais $f_1(1)+f_1(1) = 1+1$, donc $f(1+1) \neq f(1) + f(1)$ ;

$f_2$ n'est pas linéaire si $b \neq 0$ : $f(0) = b \neq 0$ ; si $b = 0$, $f_2$ est $\mathbb{R}$-linéaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x + y) = a(\lambda x + y) = \lambda(ax) + ay = \lambda f(x) + f(y)$.

$f_5$ n'est pas linéaire : $f_5(1+1) = f_5(2) = 4$ et $f_5(1) + f_5(1) = 1 + 1 = 2$.

$f_6$ et $f_8$ ne sont pas linéaires : $f_6(0) \neq 0$ et $f_8(0,0,0) \neq (0,0)$.

Toutes les autres applications sont $\mathbb{R}$-linéaires. Traitons par exemple $f_3$ et $f_{11}$ :

$\forall z, w \in \mathbb{C}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f_3(\lambda z + w) = \overline{\lambda z + w} = \lambda\bar{z} + \bar{w} = \lambda f(z) + f(w)$.

$\forall P, Q \in \mathbb{R}_4[X]$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f_{11}(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda f_{11}(P) + f_{11}(Q)$.

$f_3$, $f_5$ et $f_6$ ne sont pas $\mathbb{C}$-linéaires. Par exemple, pour $f_3$, on a $f_3(i \times 1) = f(i) = -i$, mais $i \times f(1) = i \times 1 = i$.

**Exercice 2.** Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x + 2y, z - x, x + 4y + z).$$

(a) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
(b) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
(c) Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(d) Calculer $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f$.

*Solution de l'exercice 2.* (a) Soit $u = (x,y,z), v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
& f(\lambda u + v)\\
= \ & f(\lambda(x,y,z) + (x',y',z')) = f((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z'))\\
= \ & ((\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), (\lambda z + z') - (\lambda x + x'), (\lambda x + x') + 4(\lambda y + y') + (\lambda z + z'))\\
= \ & (\lambda x + 2\lambda y, \lambda z - \lambda x, \lambda x + 4\lambda y + \lambda z) + (x' + 2y', z - x', x' + 4y' + z')\\
= \ & \lambda(x + 2y, z - x, x + 4y + z) + (x' + 2y', z - x', x' + 4y' + z')\\
= \ & \lambda f(u) + f(v)
\end{aligned}$$

(b) Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$v = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}\, f \iff f((x,y,z)) = (0,0,0) \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z - x = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 0 & 0 & a \\ -1 & 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & 4 & 1 & 0 & c \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 0 & 0 & a \\ -1 & 0 & \boxed{1} & 0 & b \\ 2 & 4 & 0 & 0 & c-b \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & \boxed{1} & 0 & b+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-b-2a \end{array}$$

D'où

$$\begin{aligned}
v = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}\, f \quad & \iff \quad \begin{cases} x = -2y \\ z = -2x \end{cases}\\
& \iff \quad v = (-2y, y, -2y) \iff v = y(-2,1,-2)
\end{aligned}$$

Finalement $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(-2,1,-2)$. Le noyau de $f$ est donc de dimension 1.

(c) Soit $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, D'après ce qui précède,

$$v = (a,b,c) \in \mathrm{Im}\, f \iff c - b - 2a = 0 \iff c = 2a + b$$

d'où

$$v = (a,b,c) \in \mathrm{Im}\, f \iff v = (a,b,c) = (a,b,2a+b) = a(1,0,2) + b(0,1,1)$$

Ainsi

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((1,0,2),(0,1,1))$$

La famille $((1,0,2),(0,1,1))$ est génératrice dans $\mathrm{Im}\, f$ et comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, c'est une base de $\mathrm{Im}\, f$. Donc $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$.

On peut prendre comme vecteurs de la base de $\mathrm{Im}\, f$ les deux vecteurs (de départ de l'algo de Gauss) où nous avons choisi les pivots, soit $(1,-1,1)$ et $(0,1,1)$.

(d) $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = 1 + 2 = 3$. On peut remarquer que cette somme est égale à $\dim \mathbb{R}^3$, l'espace de départ de $f$.

**Exercice 3.** Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(v) = (x - z, 2x + y - 3z, -y + 2z)$$

et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que $f$ est linéaire.

(b) Calculer les coordonnées $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.

(c) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

*Solution de l'exercice 3.* (a) On montre que $f$ est linéaire de la même façon que dans l'exercice 2.

(b) On a

$$\begin{cases} f(e_1) = f((1,0,0)) = (1,2,0) = e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1,-1) = e_2 - e_3 \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,-3,2) = -e_1 - 3e_2 + 2e_2 \end{cases}$$

(c) Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 & a \\ 2 & 1 & -3 & 0 & b \\ 0 & -1 & 2 & 0 & c \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 & a \\ 2 & \boxed{1} & -3 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 & c+b \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|c|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & -1 & 0 & c+b \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & a-b-c \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 2a-c \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & c+b \end{array}$$

Donc $v = (x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff x = y = z = 0$ et $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$. L'application linéaire $f$ est donc injectif et comme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f$ est bijectif (c'est un automorphisme). On en déduit que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ et que toute base de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\operatorname{Im} f$. On peut prendre par exemple comme base $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ c'est-à-dire $(1,2,0), (0,1,-1), (-1,-3,2))$.

**Exercice 4.** Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f((1,2)) = (1,0,1)$ et $f((2,1)) = (0,2,1)$.

(a) Déterminer $f((3,3))$.

(b) Déterminer $f((x,y))$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Déterminer le noyau de $f$ et son image.

*Solution de l'exercice 4.* (a) Par linéarité de $f$ on a $f((3,3)) = f((2,1) + (1,2)) = f((2,1)) + f((1,2)) = (0,2,1) + (1,0,1) = (1,2,2)$.

(b) On exprime d'abord $(1,0)$ et $(0,1)$ comme combinaisons linéaires de $(2,1)$ et $(1,2)$ : il suffit de chercher $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $(1,0) = a(2,1) + b(1,2)$ ce qui donne le système linéaire $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$. On trouve $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$ d'où $(1,0) = \frac{2}{3}(2,1) - \frac{1}{3}(1,2)$.

On fait de même pour $(0,1)$ pour trouver $(0,1) = -\frac{1}{3}(2,1) + \frac{2}{3}(1,2)$

On en déduit, par linéarité de $f$, que

$$\begin{aligned} f((1,0)) &= \frac{2}{3} f((2,1)) - \frac{1}{3} f((1,2)) \\ &= \frac{2}{3}(0,2,1) - \frac{1}{3}(1,0,1) \\ &= \frac{1}{3}(-1,4,1) \end{aligned}$$

De même, on trouve $f((0,1)) = \frac{1}{3}(2,-2,1)$

Finalement, par linéarité de $f$ on a

$$\begin{aligned} f((x,y)) &= f(x(1,0) + y(0,1)) = x f((1,0)) + y f((0,1)) \\ &= x\left[\frac{1}{3}(-1,4,1)\right] + y\left[\frac{1}{3}(2,-2,1)\right] \\ &= \frac{1}{3}(-x + 2y, 4x - 2y, x + y) \end{aligned}$$

Déterminons le noyau de $f$. Soit $(x,y) \in \operatorname{Ker} f$, donc $\begin{cases} \frac{1}{3}(-x + 2y) = 0 \\ \frac{1}{3}(4x - 2y) = 0 \\ \frac{1}{3}(x + y) = 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{cc|c|c} -1/3 & 2/3 & 0 & a \\ 4/3 & -2/3 & 0 & b \\ 1/3 & 1/3 & 0 & c \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c|c} -1 & 2 & 0 & 3a \\ 4 & -2 & 0 & 3b \\ 1 & 1 & 0 & 3c \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c|c} 0 & 3 & 0 & 3a+3c \\ 0 & -6 & 0 & 3b-12c \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 3c \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & a+c \\ 0 & -2 & 0 & b-4c \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 3c \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c|c} 0 & \boxed{1} & 0 & a+c \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b-2c \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 2c-a \end{array}$$

On en déduit que $(x,y) \in \operatorname{Ker} f \iff x = y = 0$, donc $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$. De plus $v = (a,b) \in \operatorname{Im} f \iff 2a + b - 2c = 0 \iff v = (a, -2a + 2c, c) = a(1,-2,0) + c(0,2,1)$. Par suite, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1,-2,0),(0,2,1))$ et $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

**Exercice 5.** Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(v) = (-2x + y + z, x - 2y + z).$$

(a) Montrer que $f$ est linéaire.
(b) Donner une base de $\operatorname{Ker} f$, en déduire $\dim \operatorname{Im} f$.
(c) Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

*Solution de l'exercice 5.* (1) Il est facile de montrer que $f$ est linéaire.
(2) On trouve

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(1, 1, 1)$$

C'est un sous-espace de dimension 1. D'après la formule du rang, $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\operatorname{Ker} f) = 2$.
(3) Comme $\dim(\operatorname{Im} f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ et que $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$, on a $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ et toute base de $\mathbb{R}^2$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

**Exercice 6.** Pour tout paramètre $m$ réel, soit l'application $f_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f_m(x, y) = (mx - y, x - my, (2 + m)x - (2m + 1)y).$$

(a) Montrer que, pour tout $m$, $f_m$ est une application linéaire.
(b) Pour quelles valeurs de $m$, $f_m$ est-elle injective ?
(c) Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f_m)$.

*Solution de l'exercice 6.* (1) Il est facile de montrer que $f$ est linéaire.
(2) Déterminons le noyau de $\operatorname{Ker}(f_m)$.

$$\left.\begin{array}{cc|c} m & -1 & 0 \\ 1 & -m & 0 \\ 2+m & -2m-1 & 0 \end{array}\right. \to \left.\begin{array}{cc|c} m & \boxed{-1} & 0 \\ 1-m^2 & 0 & 0 \\ 2(1-m^2) & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Si $m = \pm 1$, alors on a

$$\begin{array}{cc|c} m & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

et dans ce cas $(x, y) \in \operatorname{Ker}(f_{\pm 1}) \iff y = mx = \pm x$. Si $m = 1$, alors $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Vect}(1, 1)$ et si $m = -1$, alors $\operatorname{Ker} f_{-1} = \operatorname{Vect}(1, -1)$ et dans les deux cas $f_\pm$ n'est pas injective.
Si $m \neq \pm 1$, alors on a

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 1-m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

et dans ce cas $\operatorname{Ker}(f_m) = \{\mathbf{0}\}$. Dans ce cas $f_m$ est injective.
Ainsi, $f_m$ est injective ssi $m \neq \pm 1$.

(3) Premier cas : $m = -1$. Si $(a, b, c) \in \operatorname{Im}(f_{-1}$ alors le système linéaire correspondant donne

$$\left.\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right. \to \left.\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & a \\ 0 & 0 & b+a \\ 0 & 0 & c+a \end{array}\right.$$

Donc $b = -a$ et $c = -a$. On trouve $\operatorname{Im}(f_{-1} = \operatorname{Vect}\{(1, -1, -1)\}$.
Deuxième cas : $m = +1$ alors le système linéaire correspondant donne

$$\left.\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 3 & -3 & c \end{array}\right. \to \left.\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & c+3a \end{array}\right.$$

Donc $b = a$ et $c = -3a$. On trouve $\operatorname{Im}(f_1 = \operatorname{Vect}\{(1, 1, -3)\}$.
Troisième cas : $m \neq \pm 1$ alors d'après ce qui précède $\operatorname{Ker}(f_m) = \{\mathbf{0}\}$ et donc d'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Im} f_m = \dim \mathbb{R}^2 - 0 = 2$. Or

$$\operatorname{Im}(f_m) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \operatorname{Vect}((1, 2 + m), (-1, -m, -2m - 1))$$

et comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, il forment une base de $\operatorname{Im} f_m$.

**Exercice 7.** Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, 0, x + y - z + t, t)$$

et soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - t = 0\}$.
(a) Donner une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et sa dimension.
(b) Donner une base (la plus simple) de $\operatorname{Im}(f)$ et sa dimension.
(c) A-t-on $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^4$ ?
(d) Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et donner en une base et sa dimension.
(e) A-t-on $\operatorname{Ker}(f) \oplus F = \mathbb{R}^4$ ?

*Solution de l'exercice 7.* (a) Soit $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. On montre facilement que

$$v \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Donc $v = (0, x_3, x_3, 0) = x_3(0, 1, 1, 0)$, si on pose $v_1 = e_2 + e_3 = (0, 1, 1, 0)$ alors $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{vect}(v_1)$ et donc la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ est 1.
(b) On a d'après le cours

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$$

Or

$$f(e_1) = (1,0,1,0) = e_1 + e_3; f(e_2) = (-1,0,1,0) = -e_1 + e_3;$$
$$f(e_3) = (1,0,-1,0) = e_1 - e_3; f(e_4) = (0,0,0,1,1) = e_3 + e_4$$

donc

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(e_1+e_3, -e_1+e_3, e_1-e_3, e_3+e_4) = \operatorname{Vect}(e_1+e_3, e_1-e_3, e_3+e_4)$$

car $f(e_2) = -f(e_3)$, d'où

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}(e_1+e_3, e_1-e_3+e_1+e_3, e_3+e_4) = \operatorname{Vect}(e_1+e_3, 2e_1, e_3+e_4)\\ &= \operatorname{Vect}(e_3, e_1, e_3+e_4) = \operatorname{Vect}(e_3, e_1, e_4)\end{aligned}$$

La famille $(e_1, e_3, e_4)$ est une sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ qui est libre, elle donc est libre (et génératrice) et par conséquent c'est une base de $\operatorname{Im}(f)$

(c) Comme $\dim\left(\operatorname{Ker}(f) + \dim(\operatorname{Im}(f)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^4\right)$ Le tout est de savoir si le vecteur $v_1 = e_2+e_3 = (0,1,1,0)$ générateur de $\operatorname{Ker} f$ appartient à $\operatorname{Im}(f)$, si c'est le cas $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Im}(f)$ et il n'y a pas de somme directe et sinon $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et il y a somme directe.

Mais $v_1 = e_2 + e_3 \notin \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, e_3, e_4)$ car sinon $e_2$ serait combinaison linéaire de $e_1, e_3, e_4$ ce qui contredit que $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Ainsi $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et donc $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^4$.

Autre méthode : Pour montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires on peut aussi montrer que que $(e_2+e_3, e_1+e_3, e_1-e_3, e_3+e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (la réunion d'une base de $\operatorname{Ker} f$ et d'une base de $\operatorname{Im} f$ est une base de $\mathbb{R}^4$).

(d) On montre facilement que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ en montrant que $F$ est stable par combinaisons linéaires.

Autre méthode : On peut aussi remarquer que

$$\varphi : (x,y,z,t) \mapsto x + y - z - t$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ et que $F = \operatorname{Ker}\varphi$ et que c'est donc un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

On montre aussi (facilement) que la famille $((-1,1,0,0), (1,0,1,0), (-10,0,1))$ engendre $F$ et qu'elle est libre. C'est donc une base de $F$.

(e) Le vecteur $v_1 = (0,1,1,0) \in \operatorname{Ker} f$ et vérifie l'équation de $F$ il est donc dans $F$. D'où $\operatorname{Ker} f \subset F$. Les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $F$ ne sont donc pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 8.** Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On suppose que l'image de la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -7v_1 - 6v_2 \\ f(v_2) &= 8v_1 + 7v_2 \\ f(v_3) &= 6v_1 + 6v_2 - v_3 \end{aligned}$$

(a) Pour tout vecteur $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$ déterminer $f \circ f(v)$.

(b) En déduire que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer $f^{-1}$.

*Solution de l'exercice 8.* (a) On montre facilement que $f \circ f(v) = v$, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$.

(b) D'après (a), on a $f \circ f = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$, donc $f$ est un endomorphisme bijectif (un automorphisme) et que $f^{-1} = f$.

**Exercice 9.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 \\ f(e_2) &= \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 \\ f(e_3) &= \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 \end{aligned}$$

Soit $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = v\}$ et $E_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = -v\}$.

(a) Montrer que $E_1$ et $E_{-1}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(b) Montrer que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à $E_1$ et que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à $E_{-1}$.

(c) Que peut-on en déduire sur les dimensions de $E_1$ et de $E_{-1}$ ?

(d) Déterminer $E_1 \cap E_{-1}$.

(e) A-t-on $E_1 \oplus E_{-1} = \mathbb{R}^3$ ?

(f) Calculer $f \circ f$ et en déduire que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $f^{-1}$.

*Solution de l'exercice 9.*

**Exercice 10.** Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P(2).$$

(a) Montrer que $f$ est une application linéaire.

(b) Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

*Solution de l'exercice 10.* (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $P$ et $Q$ deux vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$. On a

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(2) = \lambda P(2) + Q(2) = \lambda f(P) + f(Q).$$

Donc $f$ est linéaire.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker} f &\iff f(P) = 0 \iff P(2) = 0 \\ &\iff 2 \text{ est racine de } P \\ &\iff \exists a,b,c \in \mathbb{R} : P(X) = (X-2)(aX^2 + bX + c) \\ &\iff \exists a,b,c \in \mathbb{R} : P(X) = aX^2(X-2) + bX(X-2) + c(X-2) \\ &\iff P \in \operatorname{Vect}(X^2(X-2), X(X-2), (X-2)) \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X^2(X-2), X(X-2), (X-2))$.
La famille $(X^2(X-2), X(X-2), (X-2))$ est génératrice dans $\operatorname{Ker} f$ et comme ces polynômes ont des degrés deux à deux distincts, il forment une famille libre. Par conséquent $(X^2(X-2), X(X-2), (X-2))$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ et on a $\dim \operatorname{Ker} f = 3$.

(b) D'après la formule du rang, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_3[X]$, on a $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_3[X] - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1$. et Comme $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}$ e que ce deux espaces ont la même dimension (égale à 1), il s'en suit que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

**Exercice 11.** Soient $a, b$ deux réels distincts et $f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ l'application définie par
$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X],\ f(P)(X) = XP(a) + P(b).$$

(a) Montrer que $f$ est une application linéaire.
(b) Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et en donner une base.
(c) Déterminer $\operatorname{Im}(f)$ et en donner une base.

*Solution de l'exercice 11.* a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $P$ et $Q$ deux vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$. On a
$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q)(X) &= X(\lambda P + Q)(a) + (\lambda P + Q)(b) \\ &= \dots \\ &= \lambda(XP(a) + P(b)) + XQ(a) + Q(b) \\ &= \lambda f(P)(X) + f(Q)(X) \end{aligned}$$
Ainsi $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$ et $f$ est linéaire.

(b) On montre comme dans l'exercice précédent que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X^2(X-a)(X-b), X(X-a)(X-b), (X-a)(X-b))$. Comme ces trois polynômes ont des degrés deux à deux différents, ils forment une famille libre. Donc $X^2(X-a)(X-b), X(X-a)(X-b), (X-a)(X-b))$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 3$.

(c) D'après la formule du rang, $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_4[X] - \dim \operatorname{Ker} f = 5 - 3 = 2$. Comme $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_1[X]$ et que ces deux espaces ont la même dimension (égale 2), on a $\operatorname{Im} f = R_1[X]$.

**Exercice 12.** Soit $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.
Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

*Solution de l'exercice 12.* Supposons que $g \circ f = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} f$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'où $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0$, ce qui veut dire $y \in \operatorname{Ker} g$.
L'autre implication est laissé au lecteur.

**Exercice 13.** Soit $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

(a) Comparer $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Ker}(f+g)$.
(b) Comparer $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im}(f+g)$.
(c) Comparer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f^2$.
(d) Comparer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2$.

*Solution de l'exercice 13.* (a) Si $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$, alors $f(x) = g(x) = 0$ et $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0$, d'où $x \in \operatorname{Ker}(f+g)$.

(b) Si $x \in \operatorname{Im}(f+g)$, alors il existe $v \in E$ tels que $x = (f+g)(v) = f(v) + g(v) \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

(c) Si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0$ et en composant par $f$, on a $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$, d'où $x \in \operatorname{Ker} f^2$.

(d) Si $x \in \operatorname{Im} f^2$, alors il existe $v \in E$ tel que $x = f^2(v) = f(f(v))$, d'où $x \in \operatorname{Im} f$.

**Exercice 14.** Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Montrer

(a) $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\} \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
(b) $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

*Solution de l'exercice 14.* (a) $\Rightarrow$ : Supposons $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$. L'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ étant toujours vraie (voir exercice 6), il suffit de montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in \operatorname{Ker} f^2$, alors $f^2(x) = 0$ ou encore $f(f(x)) = 0$, d'où $f(x) \in \operatorname{Ker} f$. Or $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ et $f(x) = 0$ ce qui assure que $x \in \operatorname{Ker} f$.
$\Leftarrow$ : Supposons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = 0$ et il existe $v \in E$ tel que $x = f(v)$. D'où $0 = f(x) = f(f(v)) = f^2(v)$, par suite $v \in \operatorname{Ker} f^2$. Or $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$, donc $v \in \operatorname{Ker} f$ et $x = f(v) = 0$. On en déduit que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.

(b) $\Rightarrow$ : Supposons $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. L'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ étant toujours vraie (voir exercice 6), il suffit de montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in \operatorname{Im} f$, il existe alors $v \in E$ tel que $x = f(v)$. Comme $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$, il existe $a \in \operatorname{Ker} f, f(b) \in \operatorname{Im} f$ tels que $v = a + f(b)$. D'où $x = f(v) = f(a + f(b)) = f(a) + f^2(b) = f^2(b)$. Ce qui montre que $x \in \operatorname{Im} f^2$.
$\Leftarrow$ Supposons $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Il existe donc $v \in E$ tel que $f(x) = f^2(v)$ ou encore $f(x - f(v)) = 0$. D'où $x - f(v) \in \operatorname{Ker} f$ et $x = (x - f(v)) + f(v) \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Ainsi $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

**Exercice 15.** Soit $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}$. Montrer

(a) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
(b) $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g \circ f)$.
(c) $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

*Solution de l'exercice 15.* (a) Il est clair que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$, alors $g \circ f(x) = 0$, puis en composant avec $f$ on obtient $f \circ g \circ f(x) = \mathbf{0}$ d'où $\mathrm{Id} \circ f(x) = \mathbf{0}$ ou encore $f(x) = 0$. Ainsi $x \in \operatorname{Ker} f$. Les deux inclusions montrent que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f)$.

(b) Il est clair que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$. Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Im} g$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Comme $f \circ g = \mathrm{Id}$, $x = f(g(x))$, donc $g = g(x) = g(f(g(x))) = g \circ f(f(x)) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. Les deux inclusions montrent que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g \circ f)$.

(c) Montrons d'abord que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g = \{\mathbf{0}\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$, alors $f(x) = \mathbf{0}$ et il existe $z \in E$ tel que $x = g(z)$. En composant cette dernière égalité par $f$ on obtient

$\mathbf{0} = f(x) = f \circ g(z) = \mathrm{Id}(z) = z$, d'où $z = \mathbf{0}$ et $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g = \{\mathbf{0}\}$.
Montrons maintenant que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$. Soit $x \in E$, alors

$$x = (x - g(f(x))) + g(f(x))$$

avec $g(f(x)) \in \operatorname{Im} g$ et $x - g(f(x)) \in \operatorname{Ker} f$ puisque $f(x - g(f(x))) = f(x) - f \circ g \circ f(x) = f(x) - \mathrm{Id} \circ f(x) = f(x) - f(x) = \mathbf{0}$. Donc $x \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$ et par suite $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$.
En conclusion $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

**Exercice 16.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$.
(a) Montrer que $p$ est un projecteur si, et seulement si, $\mathrm{Id} - p$ l'est.
(b) Exprimer alors $\operatorname{Im}(\mathrm{Id} - p)$ et $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p)$ en fonction de $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Ker}(p)$.

*Solution de l'exercice 16.* (a) Si $p$ est un projecteur (c-à-d $p^2 = p \circ p = p$) alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id} - p) \circ (\mathrm{Id} - p) &= \mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} - \mathrm{Id} \circ p - p \circ \mathrm{Id} + p \circ p \\ &= \mathrm{Id} - 2p + p \\ &= \mathrm{Id} - p\end{aligned}$$

Donc $p$ est un projecteur.

Pour l'implication réciproque on va utiliser ce qu'on vient de montrer : si $\mathrm{Id} - p$ est un projecteur alors $\mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - p) = p$ est un projecteur.

(b) Soit $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}x \in \operatorname{Im}(\mathrm{Id} - p) &\Leftrightarrow (\mathrm{Id} - p)(x) = x \\ &\Leftrightarrow x - p(x) = x \\ &\Leftrightarrow p(x) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} p\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Im}(\mathrm{Id} - p) = \operatorname{Ker} p$. De même

$$\begin{aligned}x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p) &\Leftrightarrow (\mathrm{Id} - p)(x) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x - p(x) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow p(x) = x \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{Im} p\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \operatorname{Im} p$.

**Exercice 17.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs. Montrer qu'on a équivalence entre
(a) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ ;
(b) $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

*Solution de l'exercice 17.* Supposons (a) et montrons (b). $p$ et $q$ sont deux projecteurs. Soit $x \in E$ alors

$$\begin{aligned}x \in \operatorname{Ker} p &\Rightarrow p(q) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow q \circ p(x) = q(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow q(x) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} q\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} q$. Comme $p$ et $q$ jouent le même rôle, on a $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p$.

Supposons (b) et montrons (a). Soit $x \in E$, comme $E = \operatorname{Ker} q \oplus \operatorname{Im} q$ alors $x = u + v$ avec $u \in \operatorname{Ker} q$ et $v \in \operatorname{Im} q$. D'où

$$p(x) = p(u + v) = p(u) + p(v)$$

Or $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p$, donc $p(u) = \mathbf{0}$. D'autre part, comme $v \in \operatorname{Im} q$, $v = q(v)$, donc

$$\begin{aligned}p(x) &= p(u + v) = p(u) + p(v) \\ &= \mathbf{0} + p(q(v)) \\ &= p(\mathbf{0} + q(v)) \\ &= p(q(u) + q(v)) \\ &= p(q(u + v)) \\ &= p(q(x))\end{aligned}$$

Ainsi $p(x) = p \circ q(x)$ et ceci pour tout $x \in E$, d'où $p \circ q = p$.
Comme $p$ et $q$ jouent le même rôle, on montre de même que $q \circ p = q$.

**Exercice 18.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q$ deux projecteurs de $E$ qui commutent.
(a) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de $E$.
(b) Monter que $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$ et $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

*Solution de l'exercice 18.* (a) On a $p$ et $q$ sont deux projecteurs ($p^2 = p$, $q^2 = q$) tels que $p \circ q = q \circ p$.
Montrons que $p \circ q$ est un projecteur,

$$\begin{aligned}(p \circ q)^2 &= (p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q \\ &= p \circ (p \circ q) \circ q \qquad (p \text{ et } q \text{ commutent}) \\ &= (p \circ p) \circ (q \circ q) \\ &= p \circ q\end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$, alors il existe $u \in \operatorname{Ker} p$, $v \in \operatorname{Ker} q$ tels que $x = u + v$. On a

$$p \circ q(x) = p \circ q(u + v) = p \circ q(u) + \underbrace{p \circ q(v)}_{= \mathbf{0} \text{ car } v \in \operatorname{Ker} q} = p \circ q(u) = q \circ p(u) = \mathbf{0}$$

d'où $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$.
Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$. Comme $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$, on a $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Ker}\, p$ et $v \in \mathrm{Im}\, p$. On a

$$\mathbf{0} = (p \circ q)(x) = (q \circ p)(x) = (q \circ p)(u) + (q \circ p)(v) = (q \circ p)(v) = \underbrace{q(p(v))}_{p(v)=v \text{ car } v \in \mathrm{Im}\, p} = q(v)$$

donc $v \in \mathrm{Ker}\, q$ et $x = u + v \in \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$. Ainsi $\mathrm{Ker}(p \circ q) \subset \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$ et par suite $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$.
Montrons maintenant que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(p \circ q)$, alors il existe $v \in E$ tel que $x = p \circ q(v) = p(q(v)) \in \mathrm{Im}\, p$. Comme $p$ et $q$ commutent, on a aussi $x = p \circ q(v) = q \circ p(v) = q(p(v)) \in \mathrm{Im}\, q$. Ainsi $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$ et $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.
Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$, alors $p(x) = x$ et $q(x) = x$, d'où $p \circ q(x) = x$ ce qui entraîne $x \in \mathrm{Im}(p \circ q)$, car $p \circ q$ est aussi un projecteur. Donc $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}(p \circ q)$ et par double inclusion $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.

**Exercice 19.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $s$ un endomorphisme de $E$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}$. On pose $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.
(a) Montrer que $F \oplus G = E$.
(b) Montrer que $s$ est la symétrie vectorielle par rapport à $F$ et parallèlement à $G$.

*Solution de l'exercice 19.* (a) $F$ et $G$ sont des s.e.v. de $E$ car noyaux d'applications linéaires.
Soit $x \in F \cap G$, alors $(s - \mathrm{Id})(x) = \mathbf{0}$ et $(s + \mathrm{Id})(x) = \mathbf{0}$, ce qui conduit à $s(x) = x$ et $s(x) = -x$, donc $x = \mathbf{0}$. D'où $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.
Soit $x \in E$. Posons $u = \frac{1}{2}(x + s(x))$ et $v = \frac{1}{2}(x - s(x))$. On a $x = u + v$, $s(u) = \frac{1}{2}(s(x) + s^2(x)) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = u$, donc $u \in F$ et $s(v) = \frac{1}{2}(s(x) - s^2(x)) = \frac{1}{2}(s(x) - x) = -v$, donc $v \in G$. Par conséquent $F + G = E$. Ainsi $F \oplus G = E$.
(b) Puisque $E = F \oplus G$, $\forall x \in E$, $\exists! u \in F$ et $\exists! v \in G$ tels que $x = u + v$. Par définition de $F$ et $G$ on a $s(x) = s(u) + s(v) = u - v$. Donc $s$ est la symétrie vectorielle par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

**Exercice 20.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les parties $E$ et $F$ définies par

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Vect}((1,0,0,1),(1,0,1,0)) \\ F &= \{(x,y,z,t) \mid 2z + t = 0 \text{ et } z - 3t = 0\}. \end{aligned}$$

(a) Montrer que $E$ et $F$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et qu'ils sont supplémentaires.
(b) Soit $(x,y,z,t)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^4$. Donner son image par le projecteur sur $E$ parallèlement à $F$, puis son image par le projecteur sur $F$ parallèlement à $E$.
(c) Déduire de ce qui précède l'image de $(x,y,z,t)$ de $\mathbb{R}^4$ par la symétrie vectorielle par rapport à $F$, parallèlement à $E$.

*Solution de l'exercice 20.* (a) Il est clair que $E$ et $F$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Pour $F$, un vecteur $(x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow z = t = 0$. On trouve alors $F = \mathrm{Vect}((1,0,0,0),(0,1,0,0))$.
On montre ensuite que la famille

$$(v_1 := (1,0,0,1), v_2 := (1,0,1,0), v_3 := (1,0,0,0), v_4 := (0,1,0,0))$$

est une base de $\mathbb{R}^4$ (car libre), donc $E \oplus F = \mathbb{R}^4$ (réunion d'une base de $E$ et d'une base de $F$ est une base de $\mathbb{R}^4$).
(b) Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^4$ s'écrit donc de manière unique $v = v_E + v_F$ avec $v_E \in E$ et $v_F \in F$. Le projecteur sur $E$ parallèlement à $F$ est donné par $p_E(v) = v_E$. Soit $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et déterminons sa décomposion dans $E \oplus F$. Pour cela il suffit d'exprimer $v$ dans la base $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ : cherchons $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4$. On obtient donc le système linéaire

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \delta = y \\ \beta = z \\ \alpha = t \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha = t \\ \beta = z \\ \gamma = x - z - t \\ \delta = y \end{cases}$$

et

$$(x,y,z,t) = \underbrace{tv_1 + zv_2}_{\in E} + \underbrace{(x - z - t)v_3 + yv_4}_{\in F}$$

d'où

$$p_E((x,y,z,t)) = tv_1 + zv_2 = (z + t, 0, z, t).$$

On trouve de même le projecteur sur $F$ parallèlement à $E$

$$p_F((x,y,z,t)) = (x - z - t)v_3 + yv_4 = (x - z - t, y, 0, 0)$$

(c) Soit $s_F$ la symétrie vectorielle par rapport à $F$, parallèlement à $E$, alors $\forall v \in \mathbb{R}^4$, $s_F(v) = 2p_F - \mathrm{Id}$. Ainsi

$$\begin{aligned} s_F((x,y,z,t)) &= 2p_F((x,y,z,t)) - \mathrm{Id}((x,y,z,t)) \\ &= 2(x - z - t, y, 0, 0) - (x,y,z,t) \\ &= (x - 2z - 2t, y, -z, -t). \end{aligned}$$

**Exercice 21.** On considère les applications linéaires $p$ et $q$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ données pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= (-y-z, -x-z, x+y+3z) \\ q(x,y,z) &= (x-2y, -y, -2x+2y-z). \end{aligned}$$

(a) Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels $F, G$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et tels que $p$ est le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$. Déterminer $F$ et $G$.

(b) Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels $H, L$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $H \oplus L = \mathbb{R}$ et tels que $q$ est la symétrie vectorielle par rapport à $H$, parallèlement à $L$. Déterminer $H$ et $L$.

*Solution de l'exercice 21.*

**Exercice 22.** Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(a) $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
(b) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
(c) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

*Solution de l'exercice 22.*

**Exercice 23.** Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$. Montrer

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f \iff f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg}(f).$$

*Solution de l'exercice 23.* Supposons $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$, alors d'après le théorème du rang $n = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = 2 \dim \mathrm{Im}\, f = 2\mathrm{rg}(f)$. L'égalité $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$ implique aussi $f^2 = f \circ f = 0$ (voir exercice 12).

Réciproquement, supposons $f^2 = 0$ alors (toujours d'après l'exercice 12) $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. Si de plus $n = 2\mathrm{rg}(f)$ alors d'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f$, d'où $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$.

**Exercice 24. (CPU)** Soit $E$ l'espace des suites réelles convergentes. Soit l'application $f : E \to E$ qui à chaque suite $(u_n)$ de $E$ associe la suite de terme général

$$f(u_n) = u_n - u$$

où $u = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

(a) Montrer que $f$ est un projecteur de $E$
(b) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ;
(c) Soit $E_0$ le sous-espace vectoriel des suites qui convergent vers 0.
Déterminer un sous-espace supplémentaire à $E_0$ dans $E$. Donner sa dimension.

*Solution de l'exercice 24.* (a) Montrons d'abord que $f$ est linéaire. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergentes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $u = \lim u_n$ et $v = \lim v_n$. Donc $\lim(\lambda u_n + v_n) = \lambda u + v$. On a

$$f(\lambda(u_n)_n + (v_n)_n) = f((\lambda u_n + v_n)_n) = \lambda u + v = \lambda f((u_n)_n) + f((v_n)_n)$$

Montrons maintenant que $f$ est un projecteur. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle convergente et $u = \lim u_n$. On a $f((u_n)_n) = (u_n)_n - u$ et comme la suite $(u_n)_n - u$ est convergente et converge vers 0, alors son image par $f$ est $f((u_n)_n - u) = (u_n)_n - u - 0 = (u_n)_n - u$, d'où

$$f \circ f((u_n)_n) = f(f((u_n)_n)) = f((u_n)_n - u) = (u_n)_n - u = f((u_n)_n)$$

Ainsi $f \circ f = f$ et $f$ est un projecteur.

(b) Soit $(u_n)_n \in E$ avec $u = \lim u_n$.
On a

$$(u_n)_n \in \mathrm{Ker}\, f \iff (u_n)_n - u = 0 \iff (u_n)_n = u \iff (u_n)_n \text{ est constante}$$

Donc $\mathrm{Ker}\, f$ est l'espace des suites réelles constantes.

Soit $(u_n)_n \in E$ avec $u = \lim u_n$.
On a

$$(u_n)_n \in \mathrm{Im}\, f \iff f((u_n)_n) = (u_n)_n \iff (u_n)_n - u = (u_n)_n \iff u = 0.$$

Donc $\mathrm{Im}\, f$ est l'espace des suites convergente qui convergent vers 0.

(b) Puisque $f$ est un projecteur, $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$. D'après la question (a), $E_0 = \mathrm{Im}\, f$, donc un sous-espace supplémentaire à $E_0$ dans $E$ est $\mathrm{Ker}\, f$ qui est l'espace des suites réelles constantes. Sa dimension est $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$.

**Exercice 25. (CPU)** Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

(a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.
(b) Montrer que $f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(f)$.

*Solution de l'exercice 25.* (a) Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g$, alors il existe $a \in E$ tel que $f(a) = x$ et $g(x) = \mathbf{0}$. On déduit

$$x = f(a) = (f \circ g \circ f)(a) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

D'où $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{\mathbf{0}\}$.

Soit $x \in E$, on a

$$x = x - (g \circ f)(x) + (g \circ f)(x)$$

Il est claire que $g \circ f(x) \in \mathrm{Im}\, g$. De plus

$$f(x - (g \circ f)(x)) = f(x) - f \circ g \circ f(x) = f(x) - f(x) = \mathbf{0}$$

donc $x-(g\circ f)(x)\in \operatorname{Ker} f$. On en déduit que $E\subset \operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} G$. L'autre inclusion étant évidente. Par conséquent $E=\operatorname{Ker} f\oplus \operatorname{Im} g$.

Remarque : Oo peut montrer de même (en utilisant $g\circ f\circ g=g$) que $E=\operatorname{Ker} g\oplus \operatorname{Im} f$.

(b) Il est claire que $f(\operatorname{Im} g)\subset \operatorname{Im} f$. Réciproquement, soit $y\in \operatorname{Im} f$, alors il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$. On décompose $x$ dans la somme directe $E=\operatorname{Ker} f\oplus \operatorname{Im} g$, donc $x=u+g(a)$ où $u\in \operatorname{Ker} g$ et $a\in E$. Il s'ensuit que

$$y=f(x)=f(u+g(a))=f(u)+f\circ g(a)=f(g(a))\in f(\operatorname{Im} g).$$

Ainsi $f(\operatorname{Im}(g))=\operatorname{Im}(f)$.

**Exercice 26. (CPU)** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f,g\in\mathcal{L}(E)$. Établir :

(a) $\dim \operatorname{Ker}(f\circ g)\le \dim \operatorname{Ker}(f)+\dim \operatorname{Ker}(g)$.

(b) $\dim(\operatorname{Im}(f)\cap \operatorname{Ker}(g))=\operatorname{rang}(f)-\operatorname{rang}(g\circ f)$.

(c) $\operatorname{rang}(f)+\operatorname{rang}(g)-\dim E\le \operatorname{rang}(f\circ g)\le \min(\operatorname{rang}(f),\operatorname{rang}(g))$.

*Solution de l'exercice 26.* (a) Soit $H$ un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $E$. On considère $h:H\to E$ la restriction de $g\circ f$ à $H$.

(1) (a) Si $x\in \operatorname{Ker} h$ alors $x\in \operatorname{Ker} g\circ f$ et si $x\in \operatorname{Ker} f$ alors $x\in \operatorname{Ker} g\circ f$ donc $\operatorname{Ker} h+\operatorname{Ker} f\subset \operatorname{Ker} g\circ f$.

Inversement, soit $x\in \operatorname{Ker} g\circ f$. On peut écrire $x=u+v$ avec $u\in H$ et $v\in \operatorname{Ker} f$.

$(g\circ f)(x)=\mathbf{0}$ donc $h(u)=(g\circ f)(u)=\mathbf{0}$ d'où $x\in \operatorname{Ker} h+\operatorname{Ker} f$.

(2) $f$ réalise une bijection de $H$ vers $\operatorname{Im} f$ donc

$$\operatorname{rg}(h)=\operatorname{rg}\left(g|_{\operatorname{Im} f}\right)$$

Or d'après le théorème du rang on a

$$\operatorname{rg}\left(g|_{\operatorname{Im} f}\right)+\dim \operatorname{Ker} g|_{\operatorname{Im} f}=\dim \operatorname{Im} f$$

donc

$$\operatorname{rg}(h)=\operatorname{rg}(f)-\dim \operatorname{Ker} g|_{\operatorname{Im}} f\ge \operatorname{rg}(f)-\dim \operatorname{Ker} g$$

(3) $\dim \operatorname{Ker} g\circ f\le \dim \operatorname{Ker} h+\dim \operatorname{Ker} f$. donc

$$\dim \operatorname{Ker} h=\dim H-\operatorname{rg}(h)\le \operatorname{rg}(f)-(\operatorname{rg} f-\dim \operatorname{Ker} g)\le \dim \operatorname{Ker} g$$

puis l'inégalité $\operatorname{rg} h\ge \operatorname{rg} f-\dim \operatorname{Ker} g$.

(b) L'application $h=g_{|\operatorname{Im}(f)}:\operatorname{Im}(f)\to E$ est linéaire. D'après la formule du rang,

$$\dim \operatorname{Im}(f)=\dim \operatorname{Ker}(h)+\dim \operatorname{Im}(h)$$

Or $\operatorname{Im}(h)=\operatorname{Im}(g\circ f)$ et $\operatorname{Ker}(h)=\operatorname{Im}(f)\cap \operatorname{Ker}(f)$. D'où

$$\dim(\operatorname{Im}(f)\cap \operatorname{Ker}(g))=\operatorname{rang}(f)-\operatorname{rang}(g\circ f)$$

(c) La deuxième inégalité est bien connue et provient de $\operatorname{Im}(f\circ g)\subset \operatorname{Im} f$ qui donne $\operatorname{rg}(f\circ g)\le \operatorname{rg} f$ et de $\operatorname{Im}(f\circ g)=f(g(E))=\operatorname{Im} f_{\restriction g(E)}$ qui donne $\operatorname{rg}(f)\le \operatorname{rg} g$ car le rang d'une application linéaire est inférieure à la dimension de l'espace de départ. Montrons maintenant la première inégalitê. Comme déjà écrit $\operatorname{Im}(f\circ g)=\operatorname{Im} f_{|g(E)}$ donc par la formule du rang

$$\operatorname{rg}(f\circ g)=\dim g(E)-\dim \operatorname{Ker} f_{|g(E)}$$

Or $\operatorname{Ker} f_{\lceil g(E)}\subset \operatorname{Ker} f$ donc

$$\operatorname{rg}(f\circ g)\ge \operatorname{rg} g-\dim \operatorname{Ker} f=\operatorname{rg} f+\operatorname{rg} g-\dim F$$

**Exercice 27. (CPU)** Soient $E,F$ deux espaces vectoriel de dimensions finies et $f,g\in\mathcal{L}(E,F)$.
Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(f+g)\le \dim(\operatorname{Ker}(f)\cap \operatorname{Ker}(g))+\dim(\operatorname{Im}(f)\cap \operatorname{Im}(g))$.
(appliquer le théorème du rang à $h=f_{|\operatorname{Ker}(f+g)}$)

*Solution de l'exercice 27.*

**Exercice 28. (CPU)** Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ vérifiant

$$f^2-3f+2\mathrm{Id}=0.$$

(a) Montrer que $f$ est un automorphisme et exprimer $f^{-1}$ en fonction de $f$.

(b) Montrer que $E=\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})\oplus \operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id})$.

*Solution de l'exercice 28.*