Exercice 1. Vérifier si les vecteurs suivants forment une famille libre, sinon extraire une sous-famille libre maximale (écrire les autres vecteurs comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille libre maximale) et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

(a) $v_1 = (10, -5, 15, 20)$, $v_2 = (-4, 2, -6, -8)$, $v_3 = (1, 2, 3, 1)$;

(b) $v_1 = (-4, 2, -6, -8)$, $v_2 = (1, 2, 3, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1, 1)$;

(c) $v_1 = (2, -1, 1 - 1)$, $v_2 = (3, 1, 0, 0)$, $v_3 = (3, 2, 0, 2)$, $v_4 = (1, 1, 0, 2)$, $v_5 = (0, 2, -1, 3)$;

(d) $v_1 = (2, 1, 3, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0, -1)$, $v_3 = (0, 1, 1, 1)$, $v_4 = (1, 2, 1, 0)$, $v_5 = (1, 0, -1, -2)$.

Determiner dans chacun des cas (a), (b) et (d) un sous-espace supplémentaire du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs proposés.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Vérifier si les vecteurs suivants forment une famille libre, sinon extraire une sous-famille libre maximale (écrire les autres vecteurs comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille libre maximale) et la compléter en une base de E.

(a) $v_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ v_2 = -e_1 + e_2 + e_3$;

(b) $v_1 = e_1 - e_3,\ v_2 = -e_1 + e_2,\ v_3 = -e_2 + e_3$;

(c) $v_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ v_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3,\ v_3 = e_1 - 2e_2 - e_3,\ v_4 = 2e_1 + 2e_2 + 4e_3$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3 et de base (e_1, e_2, e_3). On considère les vecteurs de E suivants :

$v_1 = (1 - i)e_1 + ie_2 + (1 + i)e_3,\ v_2 = -e_1 + e_2 + 3e_3,\ v_3 = (1 - i)e_1 + ie_2 + ie_3$.

(a) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E.

(b) Calculer les coordonnées du vecteur $w = (1+i)e_1 + 2e_2 + ie_3$ dans la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 1, 1),\ v_2 = (1, 2, 3, 4),\ v_3 = (3, 1, 4, 2),$$

$$v_4 = (10, 4, 13, 7),\ v_5 = (1, 7, 8, 14)$$

et soit $E = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

(a) Déterminer une base de E et donner $\dim E$.

(b) Déterminer un sous-espace supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.

(c) Définir E par une ou plusieurs équations.

(d) Soit $w = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$. A quelle(s) condition(s) le vecteur w appartient-il à E ?

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, soit F le sous-espace vectoriel défini par les d'équations linéaires suivantes :

$$\begin{cases} x + 2y - 5z - \ \ t = 0 \\ x - \ \ y + \ \ z + 2t = 0 \end{cases}$$

(a) Trouver une base de F et calculer $\dim F$.

(b) Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$v_1 = (0, 3, 1, 1),\ v_2 = (1, -1, 1, 1),\ v_3 = (2, 0, 1, -1).$$

Trouver une base de G et donner $\dim G$.

(c) Définir G par une ou plusieurs équations.

(d) Trouver une base de $F \cap G$ et donner $\dim(F \cap G)$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces vectoriels suivants

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}((1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, 5)), \\ G &= \text{Vect}((-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)). \end{aligned}$$

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (0, 1, -2, 1),\ v_2 = (1, 0, 2, -1),\ v_3 = (3, 2, 2, -1),$$

$$v_4 = (0, 0, 1, 0),\ v_5 = (0, 0, 0, 1).$$

Les propositiosn suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

(a) $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)$;

(b) $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}(v_1, v_2) \cap \text{Vect}(v_2, v_3, v_4)$;

(c) $\dim\left(\text{Vect}(v_1, v_2) \cap \text{Vect}(v_2, v_3, v_4)\right) = 1$;

(d) $\text{Vect}(v_1, v_2) + \text{Vect}(v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^4$;

(e) $\text{Vect}(v_4, v_5) \oplus \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^4$.

Exercice 8. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ soient

$$E_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = m\} \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}((1, 1, 0)).$$

(a) Déterminer m pour que E_m soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) Trouver alors une base de E_m.

(c) Montrer que $E_m \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Exercice 9. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soient les trois vecteurs

$$v_1 = (0, 1, 1),\ v_2 = (2, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, -1).$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(v_1, v_2) \oplus \text{Vect}(v_3)$.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} F &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \right\} \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}, \end{aligned}$$

et soit les vecteurs $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (-2, -1, 1)$ et $v_3 = (-1, 0, 2)$.

(a) Déterminer une base de F.
(b) Montrer que (v_2, v_3) est une base de G.
(c) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
(d) A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
(e) Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimer v dans la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} E &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x-2y+2z+t=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \right\} \\ F &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+6y+7z-t=0 \right\} \end{aligned}$$

Soient $v_1 = (2, 1, -1, 2), v_2 = (1, 1, -1, 1), v_3 = (-1, -2, 3, 7)$ et $v_4 = (4, 4, -5, -3)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

(a) Déterminer une base de E et en déduire la dimension de E.
(b) Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.
(c) Déterminer une base de F.
(d) A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$? Troisième partie
(e) Montrer que $F = \operatorname{Vect}(v_2, v_3, v_4)$.
(f) Soit $u = (x, y, z, t) \in F$, exprimer u comme une combinaison linéaire de v_2, v_3 et v_4.

Exercice 12. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, soient les vecteurs

$$v_1 = (0, 1, 2, 3),\ v_2 = (1, 1, 1, 1)$$

et soit

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + z + t = 0\}.$$

(a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Trouver une base de F et donner $\dim F$.
(b) Montrer que $F + \operatorname{Vect}\{v_1, v_2\} = \mathbb{R}^4$ mais que $F \cup \operatorname{Vect}(v_1, v_2) \neq \mathbb{R}^4$.
(c) Les sous-espaces F et $\operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 13. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et soient $v_1 = 2e_4 - e_3$, $v_2 = e_2 + e_3$.

(a) Définir le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ par une ou plusieurs équations. Donner $\dim \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$.
(b) Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\operatorname{Vect}(v_1, v_2)$.

Exercice 14. Quel est le rang des familles de vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

(a) $v_1 = (1, 1, 1, 1,)$, $v_2 = (1, -1, 1 - 1)$, $v_3 = (1, 0, 1, 1)$;
(b) $v_1 = (1, 2, 1, 2)$, $v_2 = (3, 1, 1, 1)$, $v_3 = (2, 7, 2, 1)$, $v_4 = (3, 2, 1, 0)$.

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^5$ on considère le sous-espace vectoriel F engendré par

$$v_1 = (3, 2, 3, 4, 5),\ v_2 = (3, 1, 3, 5, 6),\ v_3 = (2, 1, 0, 1, 4)$$

et le sous-espace vectoriel G engendré par

$$w_1 = (2, 0, 0, -2, 4),\ w_2 = (1, 0, 7, 3, 1),\ w_3 = (2, 1, 2, 0, 2).$$

Donner une base de $F + G$ et une base de $F \cap G$.

Exercice 16. Soit $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $d \leq 3$.

(a) Montrer que $(X^3 + 1, X^2 - X, X - 1, X^2 + 1, 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.
(b) Extraire de cette famille une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 17. (a) Dans $\mathbb{R}_n[X]$ (pour $n \geq 3$) on considère les polynômes

$$\begin{gathered} P_1(X) = X(X-1)(X-2),\ P_2(X) = X(X-2)(X-3), \\ P_3(X) = X(X-1)(X-3), P_4(X) = (X-1)(X-2)(X-3). \end{gathered}$$

Forment-ils une famille libre ?

(b) Même question pour les polynômes

$$\begin{gathered} Q_1(X) = (X-1)^3,\ Q_2(X) = (X-1)^2(X-2), \\ Q_3(X) = (X-1)(X-2)^2,\ Q_4(X) = (X-2)^3. \end{gathered}$$

Exercice 18. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$P_k(X) = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}.$$

Montrer que la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 19. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note

$$F_i = \{P \in E \mid \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}.$$

Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels et que

$$E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n.$$

Exercice 20. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère les fonctions f_k et g_k définies par :

$$f_0(x) = 1,\ f_k(x) = \cos(kx) \text{ et } g_k(x) = \sin(kx)$$

pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$.

(a) Montrer par récurrence que la famille $(f_0, f_1, g_1 \cdots, f_n, g_n)$ est libre.
(b) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $(f_0, f_1, g_1, f_2, g_2)$ et soit la fonction $h : x \mapsto 1 + \sin x + \sin(2x)$. Après avoir donné une base et la dimension de F, déterminer si la famille $(h, h', h'', h^{(3)}, h^{(4)})$ est une base de F.

Exercice 21. (a) Vérifier que l'ensemble F des fonctions qui s'écrivent sos la forme $f(x) = a + b\sin x + c\cos x$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Calculer $\dim F$.

(c) Montrer que pour tout réel α, la fonction $f_\alpha(x) = \cos(x - \alpha)$ appartient à F.

(d) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Le système $(f_\alpha, f_\beta, f_\gamma)$ est-il libre ?

Exercice 22. Dans $E = \mathcal{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$ on considère

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ f_2 = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

Exercice 23. (CPU) Soient F et G deux sous-espace vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$. Montrer que

– ou bien F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$;

– ou bien il existe trois vecteurs u, v, w linéairement indépendants de $\mathbb{R}^4$ tels que $G = \mathrm{Vect}(u, v)$ et $F = \mathrm{Vect}(v, w)$

– ou bien $F = G$.

Exercice 24. (CPU) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

(a) Montrer que F peut s'écrire comme une intersection d'un nombre fini d'hyperplan de E.

(b) Déterminer le nombre minimum d'hyperplans nécessaire.