Espaces vectoriels

Exercice 1. Montrer que les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels pour l'addition usuelle des polynômes et la multiplication scalaire par un réel.
(a) $\mathcal{P} = \{a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$;
(b) $\mathcal{P} = \{a_0 + a_1 x \mid a_0 - 2a_1 = 0\}$;

Exercice 2. Montrer que l'ensemble

$$E = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\}$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois héritées de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. Montrer que les ensembles suivants ne sont pas des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

(a) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$;

(b) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$;

(c) $E = \left\{\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$;

(d) $E = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+\}$;

(e) $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 4,\ 3x - y = 3 \text{ et } 6x + 4y = 10\right\}$.

Exercice 4. Montrer que $\mathbb{R}^2$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. $\mathbb{R}^3$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les opérations suivantes :
(a)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. (CPU) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

et de la multiplication scalaire par les nombres complexes

$$(a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

Montrer que $E \times E$ est $\mathbb{C}$-espace vectoriel (on l'appelle le **complexifié** de E).

Sous-espaces vectoriels

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$$F = \{xe_1 + ye_2 \mid 2x - y = 0\},$$
$$G = \{xe_1 + ye_2 \mid 2x - y = 0\} \cup \{xe_1 + ye_2 \mid x - 2y = 0\}.$$

Exercice 8. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$?
(a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$, montrer que si $u_1 = (1, 2, 0)$ et $u_2 = (0, 3, 1)$ alors $E_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$;
(b) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x = 2y + iz = 0\}$;
(c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - y + z = 1\}$;

Exercice 9. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, muni des lois usuelles, étudier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &= \{f \mid f(0) = 0\}; \\
\mathcal{F}_1 &= \{f \mid f(0) = 1\}; \\
\mathcal{F}_{0,1} &= \{f \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\}; \\
\mathcal{F'}_{0,1} &= \{f \mid f(0) = 0 \text{ ou } f(1) = 0\}; \\
\mathcal{B} &= \{f \text{ bornée}\}; \\
\mathcal{M} &= \{f \text{ majorée}\}; \\
\mathcal{I} &= \left\{f \text{ continue} \mid \int_0^1 f(t)\, dt = 0\right\}; \\
\mathcal{S} &= \{f \text{ deux fois dérivable} \mid f'' + f = 0\}.
\end{aligned}$$

Exercice 10. Montrer que les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels pour les lois usuelles :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists A_f \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \le A_f |x|\}; \\
\mathcal{F}_2 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists (a, A) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}, |x| \ge a \Rightarrow |f(x)| \le A|x|\}; \\
\mathcal{C} &= \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mid \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (|u_n|)^{1/n} < +\infty\}.
\end{aligned}$$

Exercice 11. Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, préciser lesquels sont des espaces vectoriels.

$$\begin{array}{ll}(a) & \left\{a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\};\\ (b) & \left\{\begin{pmatrix}a&1\\0&b\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\};\\ (c) & \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R})=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^T=A\};\\ (d) & \mathrm{Skew}(2,\mathbb{R})=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^T=-A\}.\end{array}$$

où $A^T=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ est la transposée de la matrice $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les trois sous-ensembles :

$$E=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid \begin{cases}x_1+x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+2x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}\right\};$$
$$F=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid \begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+2x_4=0\\3x_2+4x_3+2x_4=0\end{cases}\right\};$$
$$G=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid \begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+2x_4=0\\2x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}\right\}.$$

(a) Vérifier que E,F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
(b) Montrer que $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et que $E\cap G$ est une droite vectorielle que l'on déterminera.

Exercice 13. Soient F,G et H trois sous-espaces vectoriels de d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
(a) Comparer les s.e.v. :
(1) $F\cap(G+H)$ et $(F\cap G)+(F\cap H)$;
(2) $F+(G\cap H)$ et $(F+G)\cap(F+H)$.
(b) Montrer $\begin{cases}F\cap G=F+H\\F\cap H=F+G\end{cases} \Rightarrow F=G=H.$

Exercice 14. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
(a) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E ;
(2) $F\cup G=F+G$;
(3) $F\subset G$ ou $G\subset F$;
(b) Montrer que $F\cap G=F+G \iff F=G$.

Exercice 15. Soient A et B deux parties de d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Comparer $\mathrm{Vect}(A\cap B)$ et $\mathrm{Vect}(A)\cap\mathrm{Vect}(B)$.

Familles de vecteurs

Exercice 16. Les familles suivantes sont-elles libres ? Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :
(a) $v_1=(1,0,1)$, $v_2=(0,2,2)$, $v_3=(3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$;
(b) $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(2,0,1)$, $v_3=(1,3,2)$, $v_4=(0,1,0)$, $v_5=(0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^3$;
(c) $v_1=(1,2,2,1)$, $v_2=(1,0,2,3)$, $v_3=(1,1,2,2)$ dans $\mathbb{R}^4$;
(d) $v_1=(1,2,1,2,1)$, $v_2=(2,1,2,1,2)$, $v_3=(1,0,1,1,0)$, $v_4=(0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$;
(e) $v_1=(2,4,3,-1,-2,1)$, $v_2=(1,1,2,1,3,1)$, $v_3=(0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice 17. On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de quatre vecteurs linéairement indépendants (e_1,e_2,e_3,e_4). Les familles suivantes sont-elles libres ?
(a) $(e_1,2e_2,e_3)$;
(b) (e_1,e_3) ;
(c) $(e_1,2e_1+e_4,e_4)$;
(d) $(3e_1+e_3,e_3,e_2+e_3)$;
(e) $(2e_1+e_2,e_1-3e_2,e_4,e_2-e_1)$.

Exercice 18. (a) Soit les vecteurs $v_1=(1,2,1,1)$, $v_2=(2,1,1,2)$, $v_3=(1,1,2,0)$ et $v=(0,1,0,1)$. Chercher si $v\in\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$.
(b) Même question avec $v_1=(1,2,2,1)$, $v_2=(1,-1,1,3)$, $v_3=(1,1,2,2)$ et $v=(4,-1,0,5)$.
(c) Même question avec $v_1=(1,2,2,1)$, $v_2=(1,0,2,3)$, $v_3=(1,1,2,2)$ et $v=(1,3,2,0)$.

Exercice 19. Soient les vecteurs $v_1=(1,1,2)$, $v_2=(1,-1,1)$ et $u=(0,1,\alpha)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
(a) Donner une CNS sur α pour que $u\in\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.
(b) Comparer alors $\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$, $\mathrm{Vect}(v_1,u)$ et $\mathrm{Vect}(v_2,u)$.

Exercice 20. Dans $\mathcal{F}([0,2\pi],\mathbb{R})$, on considère les fonctions définies par

$$\forall x\in[0,2\pi],\quad f_1(x)=\cos x,\, f_2(x)=x\cos x,\, f_3(x)=\sin x,\, f_4(x)=x\sin x.$$

Montrer que la famille (f_1,f_2,f_3,f_4) est libre.

Exercice 21. Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les fonctions définies par,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_1(x)=\cos(x+a),\, f_2(x)=\sin(x+b),\, f_3(x)=\sin(x+c).$$

La famille (f_1,f_2,f_3) est-elle libre ?

s.e.v. définis par équations ou par générateurs

Exercice 22. Définir les sous-espaces vectoriels suivants par un système d'équations
(a) $F_1 = \text{Vect}((1, 2, 3))$;
(b) $F_2 = \text{Vect}((1, 2, 3), (1, 1, 1))$;
(c) $F_3 = \text{Vect}((4, -1, 2), (-3, 6, 9), (7, 3, 13))$;
(d) $F_4 = \text{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2), (3, 7, 0), (5, 0, -7))$;
(e) $F_5 = \text{Vect}((0, 1, -2, 1), (1, 0, 2, -1), (3, 2, 2, -1))$.

Exercice 23. Définir les sous-espaces vectoriels suivants par des générateurs
(a) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$;
(b) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$;
(c) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 3z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\}$;
(d) $F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + 2z - 2t = 0\}$;
(e) $F_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 5x + y + 7z - t = 0 \text{ et } x - 3y + 3z - 5t = 0\}$;
(f) $F_6 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.