Exercice 1. Calculer le produit AB dans chacun des cas suivants :

(a) $A=\begin{pmatrix}2&4&-1\\3&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&3\\1&-1\end{pmatrix}$.

(b) $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&3\\1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4&-1\\3&2&1\end{pmatrix}$.

(c) $A=\begin{pmatrix}4&1&1\\2&1&-2\\3&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2&2\\1&-1&1\\-3&3&1\end{pmatrix}$.

Exercice 2. (a) Soient

$$L=\begin{pmatrix}-3&4&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1\\2\\-8\end{pmatrix}$$

Calcuer LC et CL.
(b) Même question pour

$$L=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\\3&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&3\end{pmatrix}$$

Exercice 3. Considérons les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\-1&-1&0\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices AB, BA, $AB+3I_2$, DE, ED, AC, CA, DC CD, C^2.

Exercice 4. Soient les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&3&1&-1\\2&4&0&3\\-3&1&-1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\\0&-2\\4&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-2&0&5\\1&0&-3&4\end{pmatrix}$$

(a) La matrice $D=ABC$ existe-elle ?, si oui, calculer $d_{3,4}$.
(b) La matrice $E=BAC$ existe-elle ?, si oui, calculer $e_{2,2}$.
(c) La matrice $F=BCA$ existe-elle ?, si oui, calculer $f_{4,3}$.
(d) La matrice $G=ACB$ existe-elle ?, si oui, calculer $g_{3,1}$.
(e) La matrice $H=CAB$ existe-elle ?, si oui, calculer $h_{2,1}$.
(f) La matrice $J=CBA$ existe-elle ?, si oui, calculer $j_{1,3}$.
(g) Calculer $M=3A^2-5(BC)^2$.

Exercice 5. Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\4&6&7\end{pmatrix}$. Résoudre $AX=\begin{pmatrix}3&3\\4&5\\5&7\end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soit $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\8&1&-5\\4&3&-3\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&-1\\-5&0&3\end{pmatrix}$.
Existe-t-il une matrice B telle que $BC=A$?

Exercice 7. Soient les matrices

$$A=\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},$$

(a) Trouver $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $A=\alpha B+\beta I_2$.
(b) En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 8. Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$(a)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\qquad (b)\ \begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$(c)\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad (d)\ \begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}.$$

Exercice 9. (a) Soit $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I_3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

(b) Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^3, A et I_3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

(c) Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I_3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 10. Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse.

$$(a)\ \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix};\qquad (b)\ \begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix};\qquad (c)\ \begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&2&1\end{pmatrix};$$

$$(d)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \qquad (e)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Montrer que les matrices suivantes ne sont pas inversibles

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. Pour quelles valeurs de α, β, γ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

Déterminer alors leur inverse.

Exercice 13. (CPU) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $A^2 - A - 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuer la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$.
(c) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. (CPU) Pour tout réels a et b, soient les matrices de type (n, n)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) En exprimant $A = \alpha I_n + \beta N$, calculer A^m pour tout entier positif m.
(b) Déterminer les conditions sur a et b pour que la matrice A soit inversible. Calculer A^{-1}.

Exercice 15. (Interro-CPU) Soient $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16. (CPU) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

quand cet inverse existe.