Exercice 1. Calculer le produit AB dans chacun des cas suivants :

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 1.

(a) $AB = \begin{pmatrix} -3 & 13 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,

(b) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$,

(c) $AB = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 10 \\ 11 & -3 & 3 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. (a) Soient

$$L = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Calcuer LC et CL.
(b) Même question pour

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 2.

(a) $LC = (-3) \simeq -3$, $CL = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -6 & 8 & 2 \\ 24 & -32 & -8 \end{pmatrix}$.

(b) $LC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $CL = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices AB, BA, $AB + 3I_2$, DE, ED, AC, CA, DC CD, C^2.

Solution de l'exercice 3.

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$BA + 3I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$DE = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$,

$ED = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$CD = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

CA, DC et C^2 ne sont pas possibles.

Exercice 4. Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) La matrice $D = ABC$ existe-elle ?, si oui, calculer $d_{3,4}$.
(b) La matrice $E = BAC$ existe-elle ?, si oui, calculer $e_{2,2}$.
(c) La matrice $F = BCA$ existe-elle ?, si oui, calculer $f_{4,3}$.
(d) La matrice $G = ACB$ existe-elle ?, si oui, calculer $g_{3,1}$.
(e) La matrice $H = CAB$ existe-elle ?, si oui, calculer $h_{2,1}$.
(f) La matrice $J = CBA$ existe-elle ?, si oui, calculer $j_{1,3}$.
(g) Calculer $M = 3A^2 - 5(BC)^2$.

Solution de l'exercice 4. Laissé aux étudiants !

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 5.

Les règles de calcul des matrice nous indiquent que X est une matrice de type $(3,2)$ de la forme $X = \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{pmatrix}$. L'équation $AX = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ conduit à la résolution du système linéaire (à 6 inconnues et 6 équations)

$$\begin{cases} a+2b+3c = 3 \\ 2a+3b+4c = 4 \\ 4a+6b+7c = 5 \\ x+2y+3z = 3 \\ 2x+3y+4z = 5 \\ 4x+6y+7z = 7 \end{cases}$$

On trouve $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Existe-t-il une matrice B telle que $BC = A$?

Solution de l'exercice 6.

Même raisonnement que dans l'exercice 5. On trouve une famille de matrices données par $B = \begin{pmatrix} a & 2a-1 & a \\ b+2 & 2b+3 & b \\ c+2 & 2c+1 & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

(a) Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $A = \alpha B + \beta I_2$.
(b) En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 7.

(a) On trouve $a = 4$ et $b = 1$. Donc $A = 4B + I_2$.
(b) Comme la matrice I_2 commute à $4B$, la formule du binôme donne

$$\begin{aligned} A^n = (4B+I_2)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4B)^k I_2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k B^k \end{aligned}$$

D'autre part, $B^2 = \mathbf{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et pour tout $k \geq 2$, $B^k = \mathbf{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, donc

$$\begin{aligned} A^n = (4B+I_2)^n &= \binom{n}{0} 4^0 B^0 + \binom{n}{1} 4^1 B^1 \\ &= I_2 + 4nB \\ &= \begin{pmatrix} 4n+1 & -4n \\ 4n & -4n+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 8. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (d) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 8.

(a) On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + J$$

avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a aussi $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \mathbf{0}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et cette dernière égalité entraîne $\forall k \geq 3$, $J^k = \mathbf{0}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Comme I_3 et J commutent, d'après la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} A^n &= (J+I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k \\ &= \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 \\ &= I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) On a $A = 3I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a aussi $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \mathbf{0}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Comme $3I_3$ et J commutent,

$$\begin{aligned}
A^n &= (3I_3 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (3I_3)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (3)^{n-k} I_3 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} J^k \\
&= \binom{n}{0} 3^{n-0} J^0 + \binom{n}{1} 3^{n-1} J^1 + \binom{n}{2} 3^{n-2} J^2 \\
&= 3^n I_3 + n3^{n-1} J + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} J^2 \\
&= \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) On a $A = I_4 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I et J commutent, donc

$$\begin{aligned}
A^n = (I + J)^n &= \binom{n}{0} I_4 + \binom{n}{1} J + \binom{n}{2} J^2 + \binom{n}{3} J^3 \\
&= I_4 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} J^3 \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

(d) On a $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2I_3 + J$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a aussi $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3J$, puis on montre par récurrence que $\forall k \geq 1$, $J^k = 3^{k-1} J$. Comme $2I$ et J commutent, on a

$$\begin{aligned}
A^n = (J + 2I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k \times 2^{n-k} I_3^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} J^0 2^{n-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k \\
&= 2^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k-1} J \\
&= 2^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k-1} \right) J \\
&= 2^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k} \right) J \\
&= 2^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k} - \binom{n}{0} 3^0 2^{n-0} \right) J \\
&= 2^n I_3 + \frac{1}{3} \left((3+2)^n - 2^n \right) J \\
&= 2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} J \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

Exercice 9. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I_3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^3, A et I_3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I_3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Solution de l'exercice 9.

(a) On montre que $A^2 + A = 2I_3$, donc $\frac{1}{2}(A + I_3)A = I_3$. On en déduit que A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3)$.

(b) On montre que $A^3 - A = 4I_3$, donc $\frac{1}{4}(A^2 - I_3)A = I_3$. On en déduit que A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)$.

(c) On montre que $A^2 - 3A = -2I_3$, donc $\frac{1}{2}(3I_3 - A)A = I_3$. On en déduit que A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_3 - A)$.

Exercice 10. Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse.

$$(a)\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix};\quad (b)\ \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix};\quad (c)\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix};$$

$$(d)\ \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -2 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix};\quad (e)\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 10.

On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $\mathrm{rang}(A) = n$. Rappelons aussi que $\mathrm{rang}(A)$ est égale au nombre de pivots de A. On applique l'algorithme de Gauss pour trouver en même temps le rang de A et calculer son inverse A^{-1}. (voir plus de détail pages 19, 20, chapitre 1). On trouve

$$(a)\ \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix};\ (b)\ \begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\ (c)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix};$$

$$(d)\ \begin{pmatrix}3/5 & 1/5 & 2/5\\ -6/5 & -2/5 & 1/5\\ 4/5 & 3/5 & 1/5\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -6 & -2 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix};$$

$$(e)\ \begin{pmatrix}3/5 & -1/5 & -1/5 & 2/5\\ 1/5 & 3/5 & -2/5 & -1/5\\ 1/5 & -2/5 & 3/5 & -1/5\\ 2/5 & 1/5 & 1/5 & 3/5\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -2 & -1\\ 1 & -2 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Montrer que les matrices suivantes ne sont pas inversibles

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 11.

$\mathrm{rang}(A) = 2 < 3$ donc A n'est pas inversible.
$\mathrm{rang}(B) = 3 < 4$ donc A n'est pas inversible.

Exercice 12. Pour quelles valeurs de α, β, γ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & \alpha\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1 & 1\\ 1 & 1 & \beta & 1\\ 1 & 1 & 1 & \gamma\end{pmatrix}$$

Déterminer alors leur inverse.

Solution de l'exercice 12.

Pour A :

$$\begin{matrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & \alpha\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}\boxed{1} & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 3 & \alpha-4\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}\boxed{1} & 0 & 2\\ 0 & \boxed{1} & 3\\ 0 & 0 & \alpha-13\end{matrix}$$

– Si $\alpha = 13$ alors $\mathrm{rang}(A) = 2 < 3$ et A est non inversible.
– Si $\alpha \neq 13$, alors $\mathrm{rang}(A) = 3$ et A est inversible.
Pour l'inverse on trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha - 13}\begin{pmatrix}\alpha-9 & 6 & -2\\ 6 & \alpha-4 & -3\\ -2 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

Pour B :

$$\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1 & 1\\ 1 & 1 & \beta & 1\\ 1 & 1 & 1 & \gamma\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}\boxed{1} & 1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \gamma-1\end{matrix}$$

On voit donc que A est inversible $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) = 4 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$ et $\gamma \neq 1$.
Pour l'inverse on trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 + \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\beta-1} + \frac{1}{\gamma-1} & \frac{-1}{\alpha-1} & \frac{-1}{\beta-1} & \frac{-1}{\gamma-1}\\ \frac{-1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0\\ \frac{-1}{\beta-1} & 0 & \frac{1}{\beta-1} & 0\\ \frac{-1}{\gamma-1} & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma-1}\end{pmatrix}$$

Exercice 13. (CPU) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 1/2 & 0 & 2\\ 1/4 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $A^2 - A - 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuer la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$.
(c) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 13.

(a) On vérifie facilement que $A^2 - A - 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

(b) Tout d'abord, remarquons que $X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et effectuer la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$. Donc il existe deux polynômes Q, R tels que $X^n = (X^2 - X - 2)Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(X^2 - X - 2) = 2$. Le polynôme R est donc de degré ≤ 1 et il est de la forme $R(X) = \alpha X + \beta$. D'où

$$X^n = (X^2 - X - 2)Q(X) + \alpha X + \beta$$

Pour $X = 2$, on a $2^n = 0 + \alpha \cdot 2 + \beta = 2\alpha + \beta$
Pour $X = -1$, on a $(-1)^n = 0 + \alpha \cdot (-1) + \beta = -\alpha + \beta$
On trouve alors $\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ et $\beta = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$, donc

$$X^n = (X^2 - X - 2)Q(X) + \frac{2^n - (-1)^n}{3} X + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} A^n &= (A^2 - A - 2)Q(A) + \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3 \\ &= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \times Q(A) + \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3 \\ &= \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3. \end{aligned}$$

Exercice 14. (CPU) Pour tout réels a et b, soient les matrices de type (n, n)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) En exprimant $A = \alpha I_n + \beta N$, calculer A^m pour tout entier positif m.

(b) Déterminer les conditions sur a et b pour que la matrice A soit inversible. Calculer A^{-1}.

Solution de l'exercice 14.

(a) On trouve facilement

$$A = (a-b)I_n + bN = cI_n + bN$$

en posant $c = a - b$.

Comme les matrices bN et cI_n commutent, la formule du binôme donne

$$\begin{aligned} A^m &= (bN + cI_n)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} b^k N^k c^{m-k} I_n^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} b^k c^{m-k} N^k \end{aligned}$$

Or un calcul direct donne $N^2 = nN$ et par récurrence on montre que pour tout entier $k \geq 1$, $N^k = n^{k-1}N$. Alors

$$\begin{aligned} A^m &= \binom{m}{0} b^0 c^{m-0} N^0 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} b^k c^{m-k} n^{k-1} N \\ &= c^m I_n + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (nb)^k c^{m-k} \right) N \\ &= c^m I_n + \frac{1}{n} \left((c + nb)^m - c^m \right) N \\ &= (a-b)^m I_n + \frac{1}{n} \left[(a + (n-1)b)^m - (a-b)^m \right] N. \end{aligned}$$

(b) Tout d'abord, si $b = 0$, alors $A = aI_n$. Dans ce cas la matrice A est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $A^{-1} = \frac{1}{a} I_n$.

Supposons $b \neq 0$. La relation $A^m = (a-b)^m I_n + \frac{1}{n}\left[(a + (n-1)b)^m - (a-b)^m\right] N$ implique, pour $m = 2$,

$$\begin{aligned} A^2 &= (a-b)^2 I_n + \frac{1}{n} \left[(a + (n-1)b)^2 - (a-b)^2 \right] N \\ &= (a-b)^2 I_n + b(2a + nb - 2b) N. \end{aligned}$$

Or

$$N = \frac{1}{b} A + \frac{b-a}{b} I_n$$

donc

$$\begin{aligned} A^2 &= (a-b)^2 I_n + b(2a + nb - 2b) \left(\frac{1}{b} A + \frac{b-a}{b} I_n \right) \\ &= \cdots \\ &= (2a + nb - 2b) A + (b-a)(a + (n-1)b) I_n \end{aligned}$$

d'où la relation

$$A\left(A - (2a + nb - 2b) I_n\right) = (b-a)(a + (n-1)b) I_n$$

- Si $a = b$, alors $A = aN$. Dans ce cas, A n'est pas inversible ($\mathrm{rang}(N) = 1$).
- Si $a = (1-n)b$, alors

$$A = b\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$$

La somme des ligne est nulle, A n'est donc pas inversible.

- si $a \neq b$ et $a \neq (1-n)b$, alors

$$A\left(\frac{1}{(b-a)(a+(n-1)b)}A - \frac{2a+nb-2b}{(b-a)(a+(n-1)b)}I_n\right) = I_n$$

ce qui montre que A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{(b-a)(a+(n-1)b)}A - \frac{2a+nb-2b}{(b-a)(a+(n-1)b)}I_n.$$

Exercice 15. (Interro-CPU) Soient $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 15. On a $A = N - I_3$ avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $N^3 = 0$ et $NI_3 = I_3N$. Donc d'après la formule du binôme de Newton, $A^n = (N - I_3)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k(-I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}N^k = (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1}nN + (-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}N^2$. On trouve alors

$$A^n = (-1)^n\begin{pmatrix} 1 & -na & -na \\ -n & 1+\frac{n(n-1)}{2}a & \frac{n(n-1)}{2}a \\ n & -\frac{n(n-1)}{2}a & 1-\frac{n(n-1)}{2}a \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. (CPU) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

quand cet inverse existe.

Solution de l'exercice 16. On remarque que $A = I_4 + aJ + bK$, où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$J^2 = K^2 = 2J, JK = KJ = 2K.$$

Donc le produit de deux matrices de la formes $xI_4 + yJ + zK$ est encore de cette même forme. Cela suggère de chercher s'il existe une matrice $xI_4 + yJ + zK$ (qui serait l'inverse de A) vérifiant

$$(\mathrm{I}_4 + aJ + bK)(x\mathrm{I}_4 + yJ + zK) = \mathrm{I}_4.$$

Après calcul, cette égalité est équivalente à

$$\begin{cases} x = 1 \\ (1+2a)y + 2bz = -a \\ 2by + (1+2a)z = -b \end{cases}.$$

Or le système (d'inconnues y et z) $\begin{cases} (1+2a)y + 2bz = -a \\ 2by + (1+2a)z = -b \end{cases}$ admet une solution si, et seulement si $(1+2a)^2 - 4b^2 \neq 0$. Dans ce cas, la solution est

$$y = \frac{-a-2a^2+2b^2}{(1+2a)^2-4b^2},\ z = \frac{-b}{(1+2a)^2-4b^2}.$$

Donc A est inversible si et seulement si $(1+2a)^2 - 4b^2 \neq 0$, et, dans ce cas

$$A^{-1} = I_4 + \frac{-a-2a^2+2b^2}{(1+2a)^2-4b^2}J + \frac{-b}{(1+2a)^2-4b^2}K,$$

c-à-d.,

$$A^{-1} =$$

$$\frac{1}{(1+2a)^2-4b^2}\begin{pmatrix} 1+3a+2a^2-2b^2 & -b & -a-2a^2+2b^2 & -b \\ -b & 1+3a+2a^2-2b^2 & -b & -a-2a^2+2b^2 \\ -a-2a^2+2b^2 & -b & 1+3a+2a^2-2b^2 & -b \\ -b & -a-2a^2+2b^2 & -b & 1+3a+2a^2-2b^2 \end{pmatrix}.$$