

Exercice 1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(1) \begin{cases} \sqrt{2}x + y = -1 \\ 3x + \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 7y = -9 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - 5y = -17 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 3y = 9 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} 4x - 3y = -13 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} 3x + 4y = 32 \\ 7x + 6y = 58 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases} \quad (8) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 5y = -3 \end{cases} \quad (10) \begin{cases} 4x - 2y = 14 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases} \quad (11) \begin{cases} 5x + 3y = -4 \\ x - 9y = -20 \end{cases}$$

Résoudre les systèmes linéaires des exercices de 2 à 6. Exprimer l'ensemble des solutions en utilisant des vecteurs. Identifier une solution particulière et l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Exercice 2.

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ -x + y + 2z + 3t = 2 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x - y + z + 2t = 2 \\ 2x + 3y + 7z + 4t = -1 \end{cases}$$

Exercice 3.

$$(a) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 4.

$$(a) \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 2 \\ x - 2y + 5z = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + 5y - 5z = 0 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} 2x + y - 4z = 2 \\ -x + y + z = 1 \\ x + 5y - 5z = -1 \end{cases}$$

Exercice 5.

$$(a) \begin{cases} x - y + 2z - 3t = 1 \\ 2x + y - 2z - t = 2 \\ x - 3y + z - 2t = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + y + z - t = 0 \\ x - 2y - z + 2t = 1 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ x - 2y + 3z + t = 1 \\ x - y + 3z + t = 1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} 2x + y + z - t = 0 \\ x - 4y - z + 2t = 0 \\ x + 14y + 5z - 8t = 0 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ x - 2y + 3z + 4t = 1 \\ 5x - y + 3z + 5t = 5 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} 6x - 11y + 2z - 9t = 2 \\ 2x + y - 2z - t = 1 \\ x - 3y + z - 2t = -1 \end{cases}$$

Exercice 6.

$$(a) \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 0 \\ x - 2y + 2z - t = 1 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y + 3z = 7 \\ 3x + 8y - 7z = 3 \end{cases}$$

Exercice 7. Résoudre les systèmes linéaires suivants en fonction du paramètre réel a

$$(1) \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y + az = 7 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ ax - 2y + az = -1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ ax + 8y - 7z = 7 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + ay + 3z = 5 \\ ax - 3y + z = 1 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 3x + ay + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 5x + 5y + z = 1 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ ax + 3y + z = 0 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x + 3y + z = 0 \\ 5x + 5y + az = 0 \end{cases} \quad (8) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + 3y + z = 1 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases} \quad (10) \begin{cases} ax + y + z = -1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

$$(11) \begin{cases} ax - ay + z = 1 \\ x + ay - z = 1 \\ -ax + y + az = 1 \end{cases} \quad (12) \begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ ax + y + az = 1 \\ a^2x + ay + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 8. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur α , β et γ pour que les systèmes admettent des solutions et, lorsque ces conditions sont vérifiées, trouver l'ensemble des solutions.

$$(a) \begin{cases} -x - 4y - 2z = \alpha \\ x - 3y - z = \beta \\ 2x + 4y + z = \gamma \end{cases} \quad (b) \begin{cases} -x + y + z = \alpha \\ y + 3z = \beta \\ x + z = \gamma \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - y + 2z = \alpha \\ 3x - 2y + 3z = \beta \\ -x + y - z = \gamma \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x - y + z = \alpha \\ x + 2y - z = \beta \\ 4x - y + 2z = \gamma \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x - y + 2z = \alpha \\ 3x - y - z = \beta \\ x + y - 5z = \gamma \end{cases} \quad (f) \begin{cases} 2x + y - 4z = \alpha \\ -x + y + z = \beta \\ x + 5y - 5z = \gamma \end{cases}$$

Exercice 9. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur α , β et γ pour que les systèmes suivants admettent des solutions, puis les résoudre en fonction des paramètres

$$(a) \begin{cases} x + 3y + 6z = \alpha \\ 3x + y + 3z = 1 \\ 6x + 6y + z = 1 \\ 7x + 9y + 7z = \beta \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x - y - 2z = \alpha \\ -x + 3y - z = \beta \\ -2x - 2y + 3z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 2x + y + 2z = \alpha \\ x + 2y + z = \beta \\ x + y + z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Exercice 10. (CPU) Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues x, y, z (et t pour la question (c)) en fonction des paramètres donnés

$$(a) \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y + mz = 7 \\ mx + 8y - 7z = m \end{cases} \quad (b) \begin{cases} ax + y + z = m \\ x + ay + z = m + 1 \\ x + y + az = m + 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} mx + y + z + t = a \\ x + my + z + t = b \\ x + y + mz + t = c \\ x + y + z + mt = d \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + y + z = a \\ jx + j^2y + z = aj \\ j^2x + jy + z = a \end{cases}$$