Exercice 1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

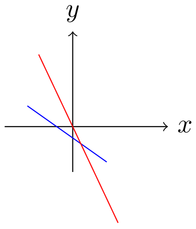
$$(1)\begin{cases}\sqrt{2}x + \phantom{\sqrt{2}}y = -1\\ 3x + \sqrt{2}y = 0\end{cases}\quad (2)\begin{cases}2x+3y=8\\ 5x-7y=-9\end{cases}\quad (3)\begin{cases}x+3y=8\\ 2x-5y=-17\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}2x+y=4\\ 5x+3y=9\end{cases}\quad (5)\begin{cases}4x-3y=-13\\ 4x-y=1\end{cases}\quad (6)\begin{cases}3x+4y=32\\ 7x+6y=58\end{cases}$$

$$(7)\begin{cases}5x-2y=4\\ 2x+3y=13\end{cases}\quad (8)\begin{cases}2x-y=1\\ -4x+3y=7\end{cases}$$

$$(9)\begin{cases}2x-3y=7\\ x+5y=-3\end{cases}\quad (10)\begin{cases}4x-2y=14\\ 3x+5y=4\end{cases}\quad (11)\begin{cases}5x+3y=-4\\ x-9y=-20\end{cases}$$

Solution de l'exercice 1. (1) Avant de résoudre le système $\begin{cases}\sqrt{2}x + \phantom{\sqrt{2}}y = -1\\ 3x + \sqrt{2}y = 0\end{cases}$ remarquons que les deux équations du systèmes sont des équations de droites dans le plan. Traçons ces deux droites.



$(1) : x = \sqrt{2}, y = -3$

On constate que ces deux droites sont concurrentes et se coupent en un point qui est la solution unique de notre système.

Résolvons maintenant notre système, par substitution ou par l'algorithme de Gauss :

$$\left.\begin{array}{cc|c}\sqrt{2} & 1 & -1\\ 3 & \sqrt{2} & 0\end{array}\right. \to \left.\begin{array}{cc|c}\sqrt{2} & \boxed{1} & -1\\ 1 & 0 & \sqrt{2}\end{array}\right. \to \left.\begin{array}{cc|c}0 & \boxed{1} & -3\\ \boxed{1} & 0 & \sqrt{2}\end{array}\right.$$

Donc le système équivalent s'écrit $\begin{cases}\quad y = -3\\ x \quad\ = \sqrt{2}\end{cases}$. L'ensemble de solution est donc $\mathcal{S} = \{(\sqrt{2}, -3)\}$ (solution unique).

On procède de la même façon pour les autres systèmes et on trouve :

(2) $\mathcal{S} = \{(1, 2)\}$; (3) $\mathcal{S} = \{(-1, 3)\}$; (4) $\mathcal{S} = \{(3, -2)\}$; (5) $\mathcal{S} = \{(2, 7)\}$; (6) $\mathcal{S} = \{(4, 5)\}$; etc ...

Résoudre les systèmes linéaires des exercices de 2 à 6. Exprimer l'ensemble des solutions en utilisant des vecteurs. Identifier une solution particulière et l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Exercice 2.

$$(a)\begin{cases}x+y+z=0\\ x+3y-z=0\end{cases}\quad (b)\begin{cases}2x-y+z=5\\ x+y+z=3\end{cases},\quad (c)\begin{cases}3x+y-z=0\\ -x+y+3z=1\end{cases}$$

$$(d)\begin{cases}x+y-z+2t=1\\ -x+y+2z+3t=2\end{cases}\quad (e)\begin{cases}x-y+z+2t=2\\ 2x+3y+7z+4t=-1\end{cases}.$$

Solution de l'exercice 2. Nous allons résoudre le système (a) par l'algorithme de Gauss :

$$\left.\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1 & 0\end{array}\right. \to \left.\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\end{array}\right. \to \left.\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right.$$

$$\to \left.\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & 0 & 2 & 0\\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0\end{array}\right.$$

nous avons alors le système équivalent suivant $\begin{cases}x \qquad + 2z = 0\\ \qquad y - z = 0\end{cases}$ où x et y sont les variables principales (celle pour lesquelles on a un pivot). En posant pour la variable secondaire $z = \alpha \in \mathbb{R}$, on a $x = -2\alpha$ et $y = \alpha$. Nous avons ainsi une infinité de solutions. L'ensemble de ces solutions est donc $\mathcal{S} = \{(-2\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;

On procède de même pour (b) et (c) et on trouve :

(b) $\mathcal{S} = \{(2\alpha - 8)/3, -(\alpha - 1)/3, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\mathcal{S} = \{(4\alpha - 1)/4, -(8\alpha - 3)/4, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;

Nous allons résoudre le système (d) par l'algorithme de Gauss :

$$\left.\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2\end{array}\right. \to \left.\begin{array}{cccc|c}\boxed{1} & 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & 3\end{array}\right. \to \left.\begin{array}{cccc|c}\boxed{1} & 3 & 0 & 7 & 4\\ 0 & 2 & \boxed{1} & 5 & 3\end{array}\right.$$

nous avons alors le système équivalent suivant

$$\begin{cases}x+3y \qquad +7t=4\\ \qquad 2y+z+5t=3\end{cases}$$

où les variables principales (là où il y a pivot) sont x et z. En posant pour les variables secondaires $y = \alpha$ et $t = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) on trouve

$$x = 4 - 3\alpha - 7\beta, z = 3 - 2\alpha - 5\beta$$

Nous avons ainsi une infinité de solutions et l'ensemble de ces solutions est $\mathcal{S} = \{(4 - 3\alpha - 7\beta, \alpha, 3 - 2\alpha - 5\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. **Remarque.** La presentation de l'ensemble de solutions de notre système n'est pas unique. Cela dépend des choix des pivots. Avec un choix de pivots sur les variables x et y l'ensemble de solutions peut aussi s'écrire $\mathcal{S} = \{((3\alpha + \beta - 1)/2, -(\alpha + 5\beta - 3)/2, \alpha, \beta) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

On procède de même pour le dernier système et on trouve :

(e) $\mathcal{S} = \{(-2\alpha - 2\beta + 1, -\alpha - 1, \alpha, \beta) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3.

$$(a) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 3.

(a) $\mathcal{S} = \{(1, 0, 1)\}$;
(b) $\mathcal{S} = \{(1, 2, 0)\}$;
(c) $\mathcal{S} = \{(-1, 3, 3)\}$.

Exercice 4.

$$(a) \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 2 \\ x - 2y + 5z = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + 5y - 5z = 0 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} 2x + y - 4z = 2 \\ -x + y + z = 1 \\ x + 5y - 5z = -1 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 4. Nous allons donner une réponse détaillée à la question (f). Résolvons le système (f) par l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \\ \boxed{1} & 5 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ \boxed{1} & 5 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & 0 \\ \boxed{1} & 5 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Le système équivalent est

$$\begin{cases} 0 = 4 \\ 3y - 2z = 0 \\ x + 5y - 5z = -1 \end{cases}$$

et ce système n'a pas de solution puisque la première équation est impossible. Ainsi $\mathcal{S} = \emptyset$.

(a) $\mathcal{S} = \{(-4\alpha/3, \alpha, 2\alpha/3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;
(b) $\mathcal{S} = \{(-(4\alpha + 2)/3, \alpha, (2\alpha + 1)/3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;
(c) $\mathcal{S} = \{(3\alpha/2, 7\alpha/2, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;
(d) $\mathcal{S} = \{((3\alpha + 1)/2, (7\alpha - 1)/2, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;
(e) $\mathcal{S} = \{(5\alpha/3, 2\alpha/3, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;

Exercice 5.

$$(a) \begin{cases} x - y + 2z - 3t = 1 \\ 2x + y - 2z - t = 2 \\ x - 3y + z - 2t = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + y + z - t = 0 \\ x - 2y - z + 2t = 1 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ x - 2y + 3z + t = 1 \\ x - y + 3z + t = 1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} 2x + y + z - t = 0 \\ x - 4y - z + 2t = 0 \\ x + 14y + 5z - 8t = 0 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ x - 2y + 3z + 4t = 1 \\ 5x - y + 3z + 5t = 5 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} 6x - 11y + 2z - 9t = 2 \\ 2x + y - 2z - t = 1 \\ x - 3y + z - 2t = -1 \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 5.

(a) $\mathcal{S} = \{((4\alpha + 3)/3, (\alpha + 12)/15, (13\alpha + 6)/15, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;
(b) $\mathcal{S} = \{(0, \alpha - 1, 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;
(c) $\mathcal{S} = \{((\alpha + 2)/2, 0, -\alpha/2, \alpha) \mid \ \in \mathbb{R}\}$;
(d) $\mathcal{S} = \{(-3\alpha + 2\beta)/9, (-3\alpha + 5\beta)/9, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$;
(e) $\mathcal{S} = \{(-(\alpha + 2\beta - 3)/3, (4\alpha + 5\beta)/3, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
(f) $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 6.

$$(a) \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 0 \\ x - 2y + 2z - t = 1 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y + 3z = 7 \\ 3x + 8y - 7z = 3 \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 6.

(a) $\mathcal{S} = \{(-4\alpha/3, -(5\alpha + 3)/12, (3\alpha + 1)/4, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;
(b) $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 7. Résoudre les systèmes linéaires suivants en fonction du paramètre réel a

$$(1)\begin{cases}2x+5y-8z=8\\4x+3y-9z=9\\2x+3y+az=7\end{cases}\quad(2)\begin{cases}2x+\ y+\ z=1\\x-2y+2z=0\\ax-2y+az=-1\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}2x+5y-8z=8\\4x+3y-9z=9\\ax+8y-7z=7\end{cases}\quad(4)\begin{cases}x-2y+\ z=1\\-x+ay+3z=5\\ax-3y+\ z=1\end{cases}.$$

$$(5)\begin{cases}3x+ay+z=0\\x+3y+z=0\\5x+5y+z=1\end{cases}\quad(6)\begin{cases}3x+\ y+z=1\\ax+3y+z=0\\5x+5y+z=0\end{cases}$$

$$(7)\begin{cases}3x+\ y+\ z=1\\x+3y+\ z=0\\5x+5y+az=0\end{cases}\quad(8)\begin{cases}ax+\ y+z=1\\x+3y+z=1\\5x+5y+z=0\end{cases}$$

$$(9)\begin{cases}ax+\ y+\ z=0\\x+ay+\ z=1\\x+\ y+az=2\end{cases}\quad(10)\begin{cases}ax+\ y+\ z=-1\\x+ay+\ z=0\\x+\ y+az=1\end{cases}$$

$$(11)\begin{cases}ax-ay+\ z=1\\x+ay-\ z=1\\-ax+\ y+az=1\end{cases}\quad(12)\begin{cases}x+ay+a^2z=1\\ax+\ y+\ az=1\\a^2x+ay+\ \ z=1\end{cases}$$

Solution de l'exercice 7. Nous allons donné une réponse détaillée à la première question. Les autres questions peuvent être traité de même.

Résolvons le système (1) par l'algorithme de Gauss :

$$\left.\begin{array}{ccc|c}2&5&-8&8\\4&3&-9&9\\2&3&a&7\end{array}\right.\to\left.\begin{array}{ccc|c}0&2&-8-a&1\\0&-3&-9-2a&-5\\\boxed{2}&3&a&7\end{array}\right.$$

$$\to\left.\begin{array}{ccc|c}0&2&-8-a&1\\0&-3&-9-2a&-5\\\boxed{2}&0&-9-a&2\end{array}\right.\to\left.\begin{array}{ccc|c}0&1&-(8+a)/2&1/2\\0&-3&-9-2a&-5\\\boxed{2}&0&-9-a&2\end{array}\right.$$

$$\to\left.\begin{array}{ccc|c}0&\boxed{1}&-(8+a)/2&1/2\\0&0&-(7a+42)/2&-7/2\\\boxed{2}&0&-9-a&2\end{array}\right.\to\left.\begin{array}{ccc|c}0&\boxed{1}&-(8+a)/2&1/2\\0&0&(a+6)&7\\\boxed{2}&0&-9-a&2\end{array}\right.$$

– Si $a+6=0$ alors la deuxième équation du dernier système équivalent devient $0=7$ ce qui est absurde. Dans ce cas l'ensemble de solution est $\mathcal{S}=\emptyset$.

– Si $a+6\neq 0$, alors on continu l'algorithme

$$\to\left.\begin{array}{ccc|c}0&\boxed{1}&-(8+a)/2&1/2\\0&0&1&7/(a+6)\\\boxed{2}&0&-9-a&2\end{array}\right.\to\left.\begin{array}{ccc|c}0&\boxed{1}&0&(a+7)/(a+6)\\0&0&\boxed{1}&1/(a+6)\\\boxed{2}&0&0&(3a+21)/(a+6)\end{array}\right.$$

d'où le système équivalent

$$\begin{cases}y=\frac{a+7}{a+6}\\z=\frac{1}{a+6}\\2x=\frac{3a+21}{a+6}\end{cases}$$

on a donc un solution unique et

$$\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{3a+21}{2a+12},\frac{a+7}{a+6},\frac{1}{a+6}\right)\right\}.$$

(2)

– si $11a+6\neq 0$ alors

$$x=\frac{6a+8}{11a+6},y=\frac{a-3}{11a+6},z=\frac{-2a-7}{11a+6}$$

– si $11a+6=0$ alors le système n'a pas de solution.

(3)

– si $3a+2\neq 0$ alors

$$x=\frac{-51}{21a+14},y=\frac{9a-28}{21a+14},z=\frac{-18a-46}{21a+14}$$

– si $a=-2/3$ alors le système n'a pas de solution.

(4)

– si $a\neq 2$ et $a^2+5a-10\neq 0$ alors

$$x=\frac{2}{a^2+5a-10},y=\frac{2a-2}{a^2+5a-10},z=\frac{a^2+9a-16}{a^2+5a-10}$$

– si $a=2$ alors

$$x=\frac{1}{4a-6},y=\frac{a-1}{4a-6},z=\frac{3}{2}$$

– si $a^2+5a-10=0$ alors le système n'a pas de solution.

(5)

– si $a\neq 9,a\neq 4$ alors

$$x=\frac{a-3}{4a-16},y=\frac{-1}{2a-8},z=\frac{-a+9}{4a-16}$$

– si $a = 9$ alors

$$x = \frac{a}{5a-15}, y = \frac{-3}{5a-15}, z = 0$$

– si $a = 4$ alors le système n'a pas de solution.

(10)

– si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, alors

$$x = \frac{-1}{a-1}, y = 0, z = \frac{1}{a-1}$$

– si $a = -2$ alors (on a une infinité de solutions)

$$x = \frac{2}{3} + \alpha, y = \frac{1}{3} + \alpha, z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

– si $a = 1$ pas de solutions.

Exercice 8. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur α, β et γ pour que les systèmes admettent des solutions et, lorsque ces conditions sont vérifiées, trouver l'ensemble des solutions.

$$(a)\begin{cases} -x-4y-2z=\alpha \\ x-3y-z=\beta \\ 2x+4y+z=\gamma \end{cases} (b)\begin{cases} -x+y+z=\alpha \\ y+3z=\beta \\ x+z=\gamma \end{cases} (c)\begin{cases} x-y+2z=\alpha \\ 3x-2y+3z=\beta \\ -x+y-z=\gamma \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} x-y+z=\alpha \\ x+2y-z=\beta \\ 4x-y+2z=\gamma \end{cases} (e)\begin{cases} x-y+2z=\alpha \\ 3x-y-z=\beta \\ x+y-5z=\gamma \end{cases} (f)\begin{cases} 2x+y-4z=\alpha \\ -x+y+z=\beta \\ x+5y-5z=\gamma \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 8.

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -2 & -a \\ 1 & -3 & -1 & b \\ 2 & 4 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -a \\ 1 & -3 & -1 & b \\ 2 & 4 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 4 & 2 & -a \\ 0 & -7 & -3 & a+b \\ 0 & -4 & -3 & 2a+c \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 4 & 2 & -a \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-a-b}{7} \\ 0 & -4 & -3 & 2a+c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{6}{7} & \frac{a+4b}{7} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{3}{7} & \frac{-a-b}{7} \\ 0 & 0 & \frac{-9}{7} & \frac{10a-4b+7c}{7} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{6}{7} & \frac{a+4b}{7} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{3}{7} & \frac{-a-b}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-10a+4b-7c}{9} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{-a+4b+2c}{9} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{a-b+c}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-10a+4b-7c}{9} \end{array}\right)$$

Ainsi

$$\mathcal{S} = \{\left(\frac{-\alpha+4\beta+2\gamma}{9}, \frac{\alpha-\beta+\gamma}{9}, \frac{-10\alpha+4\beta-7\gamma}{9}\right)\};$$

(b) $\mathcal{S} = \{(\alpha-\beta+2\gamma, 3\alpha-2\beta+3\gamma, -\alpha+\beta-\gamma)\}$;

(c) $\mathcal{S} = \{(-\alpha+\beta+\gamma, \beta+3\gamma, \alpha+\gamma)\}$;

(d) $\mathcal{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 3\alpha+\beta-\gamma \neq 0 \\ \{(\frac{2\alpha+\beta}{3} - \frac{1}{3}z, \frac{-\alpha+\beta}{3} + \frac{2}{3}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} & \text{si } 3\alpha+\beta-\gamma = 0 \end{cases}$

(e) $\mathcal{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 2\alpha-\beta+\gamma \neq 0 \\ \{(\frac{-\alpha+\beta}{2} + \frac{3}{2}z, \frac{-3\alpha+\beta}{2} + \frac{7}{2}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} & \text{si } 2\alpha-\beta+\gamma = 0 \end{cases}$

(f) $\mathcal{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 2\alpha+3\beta-\gamma \neq 0 \\ \{(\frac{\alpha-\beta}{3} + \frac{5}{3}z, \frac{\alpha+2\beta}{3} + \frac{2}{3}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} & \text{si } 2\alpha+3\beta-\gamma = 0 \end{cases}$

Exercice 9. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur α, β et γ pour que les systèmes suivants admettent des solutions, puis les résoudre en fonction des paramètres

$$(a)\begin{cases} x+3y+6z=\alpha \\ 3x+y+3z=1 \\ 6x+6y+z=1 \\ 7x+9y+7z=\beta \end{cases} (b)\begin{cases} 3x-y-2z=\alpha \\ -x+3y-z=\beta \\ -2x-2y+3z=0 \\ x-3y+z=1 \end{cases} (c)\begin{cases} 2x+y+2z=\alpha \\ x+2y+z=\beta \\ x+y+z=1 \\ 4x+3y+4z=0 \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 9.

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & a \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & 1 \\ 7 & 9 & 7 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 6 & a \\ 0 & -8 & -15 & -3a+1 \\ 0 & -12 & -35 & -6a+1 \\ 0 & -12 & -35 & -7a+b \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 6 & a \\ 0 & 1 & \frac{15}{8} & \frac{3a-1}{8} \\ 0 & -12 & -35 & -6a+1 \\ 0 & -12 & -35 & -7a+b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{7}{8} & \frac{a+1}{8} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{15}{8} & \frac{3a-1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{-25}{2} & \frac{-3a-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-25}{2} & \frac{-5a+2b-3}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{7}{8} & \frac{a+1}{8} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{15}{8} & \frac{3a-1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{-25}{2} & \frac{-3a-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -a+b-1 \end{array}\right)$$

Donc,

– si $a-b+1 \neq 0$, le système n'a pas de solution

– si $a-b+1=0$, alors

$$\rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{7}{8} & \frac{a+1}{8} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{15}{8} & \frac{3a-1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{-25}{2} & \frac{-3a-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{7}{8} & \frac{a+1}{8} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{15}{8} & \frac{3a-1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3a+1}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{-17a+36}{100} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3a-4}{20} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3a+1}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \alpha-\beta+1 \neq 0 \\ \{(\frac{-17\alpha+36}{100}, \frac{3\alpha-4}{20}, \frac{3\alpha+1}{25})\} & \text{si } \alpha-\beta+1 = 0 \end{cases}$$

(b) $\mathcal{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } (\alpha,\beta) \neq (1,-1) \\ \{(\frac{1}{4}+\frac{7}{8}z, -\frac{1}{4}+\frac{5}{8}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} & \text{si } (\alpha,\beta) = (1,-1) \end{cases}$

(c) $\mathcal{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } (\alpha,\beta) \neq (-2,5) \\ \{(-3-z, 4, z) \mid z \in \mathbb{R}\} & \text{si } (\alpha,\beta) = (-2,5) \end{cases}$

Exercice 10. (CPU) Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues x, y, z (et t pour la question (c)) en fonction des paramètres donnés

$$(a) \begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y+mz=7 \\ mx+8y-7z=m \end{cases} \quad (b) \begin{cases} ax+y+z=m \\ x+ay+z=m+1 \\ x+y+az=m+2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} mx+y+z+t=a \\ x+my+z+t=b \\ x+y+mz+t=c \\ x+y+z+mt=d \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x+y+z=a \\ jx+j^2y+z=aj \\ j^2x+jy+z=a \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 10. (a) Sous la forme du pivot de Gauss, le système s'écrit

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & m & 7 \\ m & 8 & -7 & m \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & m+8 & -1 \\ 0 & \frac{16-5m}{2} & \frac{8m-14}{2} & -3m \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 5 & -8 & 8 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 0 & -2 & m+8 & -1 \\ 0 & 16-5m & 8m-14 & -6m \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m+6 & 1 \\ 0 & & 3m+2 & -m-16 \end{array}\right.$$

Nous raisonnons sur le pivot $m+6$.

– Si $m=-6$ alors le système n'a pas de solution, puisque la troisième ligne devient $0=1$.

– Si $m \neq -6$, alors on a

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{m+6} \\ 0 & & 3m+2 & -m-16 \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & 0 & 3\frac{m+7}{m+6} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{m+7}{m+6} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{m+6} \\ 0 & & 0 & \frac{-m^2+25m+98}{m+6} \end{array}\right.$$

Pour que le système admette une solution il en plus de $m \neq -6$ que

$$-m^2+25m+98=0 \iff m=m_1=\frac{-25+\sqrt{233}}{2}; m=m_1=\frac{-25-\sqrt{233}}{2}$$

Comme ces deux valeurs sont différentes de -6, on déduit que le système admet une solution si et seulement si $m \in \{m_1, m_2\}$ et dans ce cas l'ensemble de solution est

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{3(m+7)}{2(m+6)}, \frac{m+7}{m+6}, \frac{1}{m+6}\right)\right\}$$

(b) $\begin{cases} (a=1, m\in\mathbb{R}) & text\ (a=-2, m\neq -1) : \mathcal{S}=\emptyset; \\ a=-2, m=-1 & \mathcal{S}=\{(\alpha+2/3, \alpha+1/3, \alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}; \\ a\notin\{-2,1\} & \mathcal{S}=\{\left(\frac{m(a-1)-3}{(a-1)(a-2)}, \frac{m(a-1)-3a-1}{(a-1)(a-2)}, \frac{m(a-1)-2a-1}{(a-1)(a-2)}\right)\}. \end{cases}$

(c)

(d) Présentons le système linéaire sous la forme suivante et procédons selon la méthode du pivot de Gauss

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ j & j^2 & 1 & aj \\ j^2 & j & 1 & a \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & j^2-j & 1-j & 0 \\ 0 & j-j^2 & 1-j^2 & a-aj^2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & j^2-j & 1-j & 0 \\ 0 & 0 & 2-j-j^2 & a(1-j^2) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & j & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-j-j^2 & a(1-j^2) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1+j^2 & a \\ 0 & \boxed{j} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a(1-j^2) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -j & a \\ 0 & \boxed{j} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{a(1-j^2)}{3} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{a(2+j)}{3} \\ 0 & \boxed{j} & 0 & \frac{a(1-j^2)}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{a(1-j^2)}{3} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{a(2+j)}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{a(j^2-j)}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{a(1-j^2)}{3} \end{array}\right.$$

Ainsi

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{a(2+j)}{3}, \frac{a(j^2-j)}{3}, \frac{a(1-j^2)}{3} \right) \right\}$$