N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. (1) Résoudre le système d'équations linéaires suivant, d'inconnues $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$

$$(\Sigma) : \begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 + 3x_3 + \ \ 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - \ \ 2x_2 + 3x_3 - \ \ 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 12x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

(2) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ formé par les vecteurs $v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ qui vérifient le système (Σ).

(a) Donner une famille génératrice de E.

(b) Cette famille est-elle libre ?

Solution de l'exercice 1. (1) Nous allons résoudre le système linéaire Σ par l'algorithme de Gauss. On a

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 3 & 12 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc le système Σ est équivalent au suivant (dans lequel les inconnues x_1 et x_2 sont principales et les autres inconnues sont auxiliaires)

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 3x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \ \ x_5 = 0 \\ \quad 4x_2 \qquad\qquad\qquad + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

on trouve alors

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 + \frac{1}{2}x_4 - x_5 \\ x_2 = -\frac{5}{4}x_4 \end{cases}$$

En posant $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ et $x_5 = \gamma$, l'ensemble de solutions est

$$S = \{(-3\alpha + \frac{1}{2}\beta - \gamma, -\frac{5}{4}\beta, \alpha, \beta, \gamma) \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

(2) (a) Soit $v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. D'après (1) on a

$$\begin{aligned} v \in E &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \ : v = (-3\alpha + \frac{1}{2}\beta - \gamma, -\frac{5}{4}\beta, \alpha, \beta, \gamma) \\ &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \ : \\ &\qquad v = \alpha(-3, 0, 1, 0, 0) + \beta(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, 0, 1, 0) + \gamma(-1, 0, 0, 0, 1) \\ &\iff v \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

où

$$v_1 = (-3, 0, 1, 0, 0), \ v_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, 0, 1, 0), \ v_3(-1, 0, 0, 0, 1).$$

On déduit donc que la famille (v_1, v_2, v_3) est une famille génératrice de l'espace vectoriel E.

(b) Montrons qua la famille (v_1, v_2, v_3) est libre. Pour cela, soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^5}$. D'après le calcul précédent, cela est équivalent à

$$(-3\alpha + \frac{1}{2}\beta - \gamma, -\frac{5}{4}\beta, \alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

ce qui donne clairement $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ainsi la famille en question est libre.

Exercice 2. Résoudre le système d'équations linéaires suivant, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$, et de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \alpha x + \ \ y + \ \ z = \alpha \\ x + \alpha y + \ \ z = 1 \\ x + \ \ y + \alpha z = \alpha \end{cases}$$

Faire une discussion selon le paramètre α.

Solution de l'exercice 2. Nous allons résoudre le système

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \alpha x + \ \ y + \ \ z = \alpha \\ x + \alpha y + \ \ z = 1 \\ x + \ \ y + \alpha z = \alpha \end{cases}$$

par l'algorithme de Gauss. On a

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha \end{array}\right. \to \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha+1 & -\alpha+1 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{array}\right.$$

– Si $\alpha \neq 1$ on a

$$\to \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-\alpha+1} & -\alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{array}\right. \to \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-\alpha+1} & -\alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-\alpha+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \end{array}\right.$$

Le système Σ_1 est donc équivalent au système triangulaire suivant

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ (-\alpha+1)y - (\alpha-1)z & = 0 \\ (-\alpha+1)z & = 0 \\ 0 & = \alpha - 1 \end{cases}$$

qui n'a pas de solution à cause de la dernière ligne $0 = \alpha - 1$ qui est absurde puisque $\alpha \neq 1$.

– Si $\alpha = 1$ le système Σ_1 est équivalent à

$$x + y + z = 1$$

qui a comme ensemble de solutions

$$S = \{(1 - a - b, a, b) \ : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $A^2 - 2A - 3I_2$.

(2) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

(3) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un polynôme Q_n et deux entiers α_n et β_n tels que

$$X^n = Q_n(X)\left(X^2 - 2X - 3\right) + \alpha_n X + \beta_n \qquad (1)$$

Indication : On peut faire une récurrence sur n ou bien utiliser une division euclidienne de polynômes.

(4) En évaluant l'identité (1) en -1 et 3, déterminer α_n et β_n.

(5) Evaluer l'identité (1) en A et déduire A^n pour tout $n \geq 2$. Cette expression reste-elle vraie pour $n \in \mathbb{N}$? pour $n \in \mathbb{Z}$?

Solution de l'exercice 3. (1) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

donc $A^2 - 2A - 3I_2 = 0$.

(2) Comme $A^2 - 2A - 3I_2 = 0$, on a $A(A - 2I_2) = 3I_3$ donc A est inversible et sont inverse est

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{3}(A - 2I_2) \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) Méthode 1 : D'après la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X - 3$, il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que $X^n = (X^2 - 2X - 3)Q_n(X) + R_n(X)$ et $\deg(R_n) < \deg(X^2 - 2X - 3) = 2$. Donc R_n est un polynôme de degré ≤ 1 et il est de la forme $R_n(X) = \alpha_n X + \beta_n$ où $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$. Ainsi $X^n = (X^2 - 2X - 3)Q_n(X) + \alpha_n X + \beta_n$.

Méthode 2 : (récurrence sur n). Pour $n=2$, on a :

$$X^2 = \left(X^2-2X-3\right)+2X+3$$

donc $Q_2=1$ et $(\alpha_2,\beta_2)=(2,3)$. Supposant le résultat acquis pour $n\geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}X^{n+1} &= XX^n\\ &= X(Q_n(X)(X^2-2X-3)+\alpha_nX+\beta_n)\\ &= XQ_n(X)\left(X^2-2X-3\right)+\alpha_nX^2+\beta_nX\\ &= XQ_n(X)\left(X^2-2X-3\right)+\alpha_n\left(\left(X^2-2X-3\right)+2X+3\right)+\beta_nX\\ &= (\alpha_n+XQ_n)(X)\left(X^2-2X-3\right)+(2\alpha_n+\beta_n)X+3\alpha_n\end{aligned}$$

soit le résultat au rang $n+1$.

(4) Posons $P(X)=X^2-2X-3$. On remarque -1 et 3 sont les racines de P ($P(-1)=P(3)=0$), donc

$$\begin{aligned}(-1)^n &= Q_n(-1)P(-1)+\alpha_n(-1)+\beta_n = -\alpha_n+\beta_n \quad \text{car } P(-1)=0\\ 3^n &= Q_n(3)P(3)+\alpha_n(3)+\beta_n = 3\alpha_n+\beta_n \quad \text{car } P(3)=0\end{aligned}$$

d'où le système

$$\begin{cases}-\alpha_n+\beta_n=(-1)^n\\ 3\alpha_n+\beta_n=3^n\end{cases}$$

et en résolvant le système on trouve

$$\begin{cases}\alpha_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}\\ \beta_n=\frac{3^n+3(-1)^n}{4}\end{cases}$$

(5) On remplace X par A dans l'égalité, donc pour tout entier $n\geq 2$,

$$X^n = Q_n(X)\left(X^2-2X-3\right)+\alpha_nX+\beta_nI_2$$

en utilisant $A^2-2A-3I_2=0$. On trouve :

$$\begin{aligned}A^n &= Q_n(A)(A^2-2A-3I_3)+\alpha_nA+\beta_n\\ &= \alpha_nA+\beta_nI_2\\ &= \frac{1}{4}\left(\left(3^n-(-1)^n\right)A+\left(3^n+3(-1)^n\right)I_2\right)\\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3^n-(-1)^n+3^n+3(-1)^n & 2\left(3^n-(-1)^n\right)\\ 2\left(3^n-(-1)^n\right) & 3^n-(-1)^n+3^n+3(-1)^n\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+(-1)^n & 3^n-(-1)^n\\ 3^n-(-1)^n & 3^n+(-1)^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Clairement, cette dernière formule reste vraie pour $n=0$ et $n=1$, puisqu'on trouve $A^0=I_2$ (pour $n=0$) et $A^1=A$ (pour $n=1$). Ainsi l'expression de A^n est valable pour tout $n\in\mathbb{N}$. De plus la matrice A est inversible, donc l'expression de A^n est vraie pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit $a\in\mathbb{R}$ et soient les matrices

$$D=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a&1&1\\0&a&0\\0&1&a\end{pmatrix}.$$

(1) Calculer N^2 et N^3.
(2) Vérifier que $DN=ND$.
(3) Utiliser la formule du binôme de Newton et déduire A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 4. (1) On a

$$N^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ N^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) Un calcul direct montre que $ND=DN$.

(3) On a $A = D+N$ et $ND = DN$, donc d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$$

Comme $N^3 = 0$, on $N^k = 0$ pour tout $k \geq 3$, donc

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 D^{n-2} \\ &= D^n + nND^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} N^2 D^{n-2} \end{aligned}$$

Or pour tout entier k,

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}$$

donc en mettant tout ensemble on trouve

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} & na^{n-1} \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$