Algèbre linéaire 1

Examen du 23 Mai 2023. Durée 3h

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère les vecteurs suivants

$$v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (0,1,1), v_4 = (3,-2,1)$$

et on pose

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z = 0 \text{ et } 2x-y-z = 0\right\},$$
$$F = \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4).$$

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(2) Déterminer une base de E. Quelle est la dimension de E ?
(3) Déterminer une base de F. Quelle est la dimension de F ?
(4) Déterminer F par une ou plusieurs équations.
(5) Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
(6) Déduire que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution de l'exercice 1. (1) E est l'ensemble de solutions d'un système d'équations linéaires homogènes en (x,y,z), par conséquent c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$v = (x,y,z) \in E \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-2z = 0 \\ 2x-y-z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array}\right.$$

Donc $v = (x,y,z) \in E \Leftrightarrow v = x(1,1,1) = xv_1$. Il s'ensuit que $E = \mathrm{Vect}(v_1)$. Comme v_1 n'est a nul la famille (v_1) est une base de E et $\dim E = 1$.

(3) On peut remarquer que $v_4 = 3v_2 - 2v_3$, donc

$$F = \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$$

Les deux vecteurs v_2 et v_3 n'étant pas colinéaires, la famille (v_2, v_3) est donc une base de F et $\dim F = 2$.

(4) Soit $v = (x,y,z) \in F$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha v_2 + \beta v_3$. On obtient donc le système linéaire

$$\begin{cases} \alpha \quad\quad = x \\ \quad\quad \beta = y \\ \alpha + \beta = z \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \alpha \quad\quad\quad = x \\ \quad \beta \quad\quad = y \\ \quad\quad 0 = z - x - y \end{cases}$$

On trouve $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = 0\right\}$.

(5) En utilisant les équations de E et F on montre facilement que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Comme $\dim F + \dim E = \dim \mathbb{R}^3$, on a $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

(6) On a (v_1) est une base de E et (v_2, v_3) est une base de F. Comme $E \oplus F = \mathbb{R}^3$, la concaténation (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on pose

$$f(x,y,z) = (2y - z, 2x - 5y + 4z, 3x - 8y + 6z).$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
(2) Quelle est la matrice A de f dans $\mathcal{B}_0$? Calculer A^2.
(3) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
(4) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$, où $f^2 = f \circ f$.
(5) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.
(6) Déterminer deux vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$ tels que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(v, f(v))$, puis justifier que $\mathcal{B} = (u, v, f(v))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(7) Quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
(8) Quelle est la matrice de f^2 dans $\mathcal{B}$.

(9) (**Question optionnelle avec bonus**) Calculer, A^{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$ (utiliser la formule de changement de bases de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$).

Solution de l'exercice 2. (1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y, z), v = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} f(\alpha u + v) &= f(\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z') \\ &= (2[\alpha x + x'] - [\alpha z + z'], \\ &\qquad [\alpha x + x'] - 5[\alpha y + y'] + 4[\alpha z + z'], \\ &\qquad\qquad [3[(\alpha x + x'] - 8[\alpha y + y'] + 6[\alpha z + z')]) \\ &\vdots \\ &= \alpha(2y - z, 2x - 5y + 4z, 3x - 8y + 6z) \\ &\qquad + (2y' - z', 2x' - 5y' + 4z', 3x' - 8y' + 6z') \\ &= \alpha f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire, et comme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2) On trouve

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

et

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Soit $v = (x, y, z)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_0}(v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a

$$v \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow f(v) - v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - I_3)X = \mathbf{0}$$

Or $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$, d'où le système linéaire

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

et après résolution on trouve

$$x = y = z,$$

donc $v = x(1, 1, 1)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$.

(4) Soit $v = (x, y, z)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_0}(v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a

$$v \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) \Leftrightarrow f^2(v) + v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A^2 + I_3)X = \mathbf{0}$$

Or $A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) &\Leftrightarrow x - y + x = 0 \\ &\Leftrightarrow v = (y - z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ et comme les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre et donc une base de $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

(5) On montre que $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (-1, 0, 1))$, la concaténation des bases de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$, est une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.

(6) On pose $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, 1, 0)$. On a d'après la question 2 $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(u)$. De plus $f(v) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = 2e_2 + 3e_3 + 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 = 2e_1 - 3e_2 - 5e_3 = (2, -3, -5)$. Ce vecteur appartient bien à $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$ car ses coordonnées vérifient l'équation de cet espace : $2 - (-3) + (-5) = 0$. Comme v et $f(v)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$. Comme $\dim \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) = 2$, la famille $(v, f(v))$ est une base de cet espace.

D'après la question (5) on sait que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$. Donc par concaténation des bases, la famille $\mathcal{B} = (u, v, f(v))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(7) On a

- $f(u) = u = 1 \times u + 0 \times v + 0 \times f(v)$ car $u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$;
- $f(v) = 0 \times u + 0 \times v + 1 \times f(v)$;

• $f(f(v)) = f^2(v) = -v = 0 \times u + (-1) \times v + 0 \times f(v)$ car $v \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

Donc la matrice de A dans la base $\mathcal{B}$ est

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(8) On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^2 = T^2$ avec

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(9) Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Son inverse est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} & -1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

La formule de changement de bases pour l'endomorphisme f donne $A = PTP^{-1}$, donc $A^2 = \left(PTP^{-1}\right)^2 = PT^2P^{-1}$. On en déduit

$$A^{2n} = (A^2)^n = (PT^2P^{-1})^n = P(T^2)^nP^{-1}$$

plus précisément

$$\begin{aligned} A^{2n} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} & -1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (-1)^n - 1 & -(-1)^n + 1 \\ -(-1)^n + 1 & 2(-1)^n - 1 & -(-1)^n + 1 \\ -(-1)^n + 1 & (-1)^n - 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarquons que lorsque $n = 1$, on retrouve bien l'expression de A^2 de la question (2).

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré ≤ 2 muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = \left(1, X, X^2\right)$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on pose

$$f(P) = P - (X-2)P',$$

où P' est la dérivée de P.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Déterminer le noyau et l'image de f.

(3) Déterminer la matrice A de f dans $\mathcal{B}_0$.

(4) On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X - 2$ et $P_2 = (X-2)^2$. Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(5) Déterminer la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Calculer Q^{-1}.

(6) En utilisant la formule de changement de bases, déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

(7) Calculer $f(P_0)$, $f(P_1)$ et $f(P_2)$ puis retrouver d'une autre manière la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

Solution de l'exercice 3. 1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, soient $\lambda, \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q) - (X-2)(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda P + Q - (X-2)(\lambda P' + Q') \\ &= (\lambda P - (X-2)P') + (Q - (X-2)Q') \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $d^\circ P \leq 2$ et $d^\circ P' \leq 1$. Donc $d^\circ(X-2)P' \leq 1 + 1 = 2$. Par conséquent $d^\circ f(P) \leq 2$. On en déduit que $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ et par suite f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et posons $P(X) = aX^2 + bX + c$.

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 &\Leftrightarrow (aX^2 + bX + c) - (X-2)(2aX + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow -aX^2 + 4aX + c + 2b = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -a = 0 \\ 4a = 0 \\ c + 2b = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} a = 0 \\ c = -2b \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $P = bX - 2b = b(X-2)$. Les polynômes de $\mathrm{Ker}(f)$ sont proportionnels au polynômes $X-2$, il s'agit d'une droite vectorielle dont une base est le polynôme $X-2$.

D'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$. Donc $1 + \dim \mathrm{Im}(f) = 3$ et par suite $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$.

Or $f(1) = 1$, $f(X) = 2$ et $f\left(X^2\right) = -X^2 + 4X$. Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) &= \mathrm{Vect}(1, 2, -X^2 + 4X)\\ &= \mathrm{Vect}(1, -X^2 + 4X).\end{aligned}$$

Les deux polynômes 1 et $-X^2 + 4X$ ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(4) Comme

$$f(1) = 1, f(X) = 2, f\left(X^2\right) = 4X - X^2$$

par conséquent

$$A = \mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(5) Les polynômes $P_0 = 1, P_1 = X - 2, P_2 = (X-2)^2$ forment une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ car leurs degrés forment une suite strictement croissante. Comme le cardinal de $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, on déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(6) On a $P_0 = 1$, $P_1 = -2 + X$ et $P_2 = 4 - 4X + X^2$, donc la matrice de de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse est

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) D'après la formule de changement de bases, la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$ est $D = Q^{-1}AQ$. Après calcul on trouve

$$\begin{aligned} D = Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(7) On a

$$\begin{aligned} &f(1) = 1, \text{ donc } f(P_0) = P_0 \\ &f(X-2) = X - 2 - (X-2) \times 1 = 0, \text{ donc } f(P_0) = 0 \\ &f\left((X-2)^2\right) = (X-2)^2 - (X-2) \times 2(X-2) \\ &\qquad = -(X-2)^2, \text{ donc } f(P_2) = -P_2 \end{aligned}$$

Donc

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$