Algèbre linéaire 1

# Examen du 25 Mai 2022 – durée 3h

**N.B.** Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

**Exercice 1.** ( **sur 6** ) On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1)[0,5] Calculer $J^2$.
(2)[0,5] En déduire que $J$ est inversible et calculer $J^{-1}$.
(3)[2] Soient $a$ et $b$ deux réels, et soit $M = aI_3 + bJ$.
Montrer que $M^2 = \left(b^2 - a^2\right) I_3 + 2aM$.
(4)[1,5] En déduire que si $a \neq \pm b$, alors $M$ est inversible et écrire $M^{-1}$ sous la forme $cI_3 + dJ$.
(5)[1,5] En déduire que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 2 & -3/2 + \sqrt{2} & 2 \\ 3/2 & -3/2 & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse (donner l'expression explicite de $A^{-1}$).

*Solution de l'exercice 1.* (1) On a $J^2 = I_3$.
(2) Donc $J$ est inversible et $J^{-1} = J$.
(3) On a $M = aI_3 + bJ$, donc $M^2 = a^2 I_3 + b^2 J^2 + 2abJ = (a^2 + b^2)I_3 + 2abJ$. Or $bJ = M - aI_3$, donc $M^2 = (a^2 + b^2)I_2 + 2aM - 2a^2 I = (b^2 - a^2)I_3 + 2aM$.
(2) On déduit de la question précédente que $M(M - 2aI_3) = (b^2 - a^2)I_3$. Donc si $b^2 - a^2 \neq 0$, $M$ est inversible et son inverse est

$$M^{-1} = \frac{1}{b^2 - a^2}(M - 2aI_3).$$

(5) On a $A = \sqrt{2} I_3 + \frac{1}{2} J$. Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (\sqrt{2})^2 = -\frac{7}{4} \neq 0$, la matrice $A$ est inversible et son inverse est

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{4}{7}(A - 2\sqrt{2} I_3) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{2}}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-8}{7} & \frac{4\sqrt{2}+6}{7} & \frac{-8}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{6}{7} & \frac{4\sqrt{2}-8}{7} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercice 2.** ( **sur 20** ) On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Un vecteur $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \mathbb{R}^4$ écrit dans cette base sera noté $v = (x, y, z, t)$. Soit $f$ l'application

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \mapsto (-4x - 4y + 2z, 3x + 2y - 3z, -2x + 4z, x - z + 2t) \end{aligned}$$

(1)[2] Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
(2)[1] Ecrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}_0$.
(3) (a)[1] Déterminer le rang de $A$. En déduire
(b)[0,5] que $A$ n'est pas inversible ;
(c)[0,5] la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
(4)[2] Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
(5) [1+2]Calculer $A^2$, en déduire une base $(v_1, v_2)$ de $\mathrm{Ker}(f^2)$ telle que $v_1$ soit dans $\mathrm{Ker}(f)$.
(6)[2] Déterminer une base $(v_3, v_4)$ de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
(7)[1] Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(8)[1] Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ ?
(9)[2] Ecrire (avec un minimum de calculs) la matrice $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
(10)[1] Montrer que $N^3 - 2N^2 = 0$.
(11)[1] Donner la relation qui lie $A$, $N$, $P$ et $P^{-1}$ où $P$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.
(12)[2] En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, $A^n = 2^{n-2} A^2$.

*Solution de l'exercice 2.* (1) Il est facile de montrer que $f$ est linéaire. De plus $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
(2) On a

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) (a) L'algorithme de Gauss

$$\begin{array}{cccc} -4 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \to \begin{array}{cccc} -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \boxed{2} \end{array}$$

$$\to \begin{array}{cccc} 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} \end{array} \to \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} \end{array}$$

montre que $\operatorname{rang}(A) = 3$ (nombre de pivots).

(b) Comme ce rang n'est pas égal à 4 (n'est pas maximal) la matrice $A$ n'est pas inversible.

(c) Comme $\operatorname{rang}(A) = 3$, on a $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 3$ et d'après le théorème du rang $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 4 - 3 = 1$.

(4) Cherchons une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. On a

$$v = (x, y, z, t) \in \operatorname{Ker}(f) \iff \begin{cases} -4x - 4y + 2z & = 0 \\ 3x + 2y - 3z & = 0 \\ -2x \quad + 4z & = 0 \\ x \quad - \quad z + 2t = 0 \end{cases}$$

D'après l'algorithme de Gauss développé dans la question (3)(a) on trouve

$$\begin{array}{rrrr|r} -4 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} & 0 \end{array}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} v = (x, y, z, t) \in \operatorname{Ker}(f) &\iff x = 2z, y = -\frac{3}{2}, t = -\frac{1}{2}z \\ &\iff v = z\left(2, -\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \frac{z}{2}(4, -3, 2, -1). \end{aligned}$$

Le vecteur non nul $v_1 = (4, -3, 2, -1)$ engendre $\operatorname{Ker}(f)$, il forme donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$ (ce qui est cohérent avec $\dim \operatorname{Ker}(f) = 1$).

(5) On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 12 & 0 \\ 0 & -8 & -12 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Il est claire que cette matrice est de rang 2 (les trois premières lignes sont colinéaires), donc $\dim \operatorname{Ker}(f^2) = 4 - 2 = 2$.

Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$.
On a

$$v = (x, y, z, t) \in \operatorname{Ker}(f^2) \iff \begin{cases} 8y + 12z & = 0 \\ -4y - 4z + 4t = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à

$$\begin{aligned} v = (x, y, z, t) \in \operatorname{Ker}(f^2) &\iff y = -\frac{3}{2}z, t = -\frac{1}{2}z \\ &\iff v = (x, -\frac{3}{2}z, z, -\frac{1}{2}z) \\ &\iff v = x(1, 0, 0, 0) + \frac{z}{2}(0, -3, 2, -1) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f^2) &= \operatorname{Vect}((1, 0, 0, 0), (0 - 3, 2, -1)) \\ &= \operatorname{Vect}((1, 0, 0, 0), 4(1, 0, 0, 0) + (0 - 3, 2, -1)) \\ &= \operatorname{Vect}((1, 0, 0, 0), (4 - 3, 2, -1)) \end{aligned}$$

Si on pose $v_1 = (4, -3, 2, -1)$ et $v_2 = (1, 0, 0, 0)$, alors la famille $(v_1, v_2)$ est génératrice dans $\operatorname{Ker}(f^2)$ et comme son cardinal est égal à la dimension de $\operatorname{Ker}(f^2)$, c'est une base de $\operatorname{Ker}(f^2)$. De plus $v_1 \in \operatorname{Ker}(f)$ d'après la question (4).

(6) On a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f - 2\operatorname{Id}) = A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est claire que cette matrice est de rang 2, donc $\dim \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}) = 4 - 2 = 2$. On raisonne comme dans la question (4) ou (5) pour déterminer un système générateur de $\dim \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$. On trouve

$$\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}((1, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

On pose $v_3 = (1, -1, 1, 0)$ et $v_4 = (0, 0, 0, 1)$. La famille $(v_3, v_4)$ engendre $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$ et comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, cette famille est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$.

(7) On montre sans difficulté (utilisez l'algorithme de Gauss) que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est libre et maximale dans $\mathbb{R}^4$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

(8) D'après la question précédente, la concaténation $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ de la base $(v_1, v_2)$ de $\operatorname{Ker}(f^2)$ et la base $(v_3, v_4)$ de $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Il s'ensuit que $\operatorname{Ker}(f^2)$ et $\operatorname{Im}(f - 2\operatorname{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(9) On a :

• $v_3, v_4 \in \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$, donc $f(v_3) = 2v_3$ et $f(v_4) = 2v_4$.

• $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker}(f^2)$ avec $v_1 \in \operatorname{Ker}(f)$, donc $f(v_1) = 0$. Calculons maintenant $f(v_2)$ : rappelons que $v_2 = (1, 0, 0, 0) = e_1$, donc $f(v_2) = f(e_1) = (-4, 3, -2, 1) = -v_1$.

On en déduit (avec le choix du vecteur $v_2$ que nous avons fait) que la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(10) On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Donc $N^3 - 2N^2 = 0$.

(11) Soit $P$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$. D'après la formule de changement de bases, $A = PNP^{-1}$.

(12) On a

$$\begin{aligned} A^3 = (PNP^{-1})^3 &= PN^3P^{-1} \\ &= P(2N^2)P^{-1} = 2P(N^2)P^{-1} = 2(PNP^{-1})^2 = 2A^2. \end{aligned}$$

A partir de cette relation, on montre par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$, $A^n = 2^{n-2}A^2$. Les détails sont laissés au lecteur.

**Exercice 3. ( sur 14 )** Soit $n \geq 3$ un entier. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $n$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $f(P)$ le polynôme donné par

$$f(P)(X) = (X - a)\left[P'(X) + P'(a)\right] - 2[P(X) - P(a)].$$

(1)[2] Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2)[sur 1] Soit la famille de polynômes

$$P_0(X) = 1,\ P_1(X) = X - a,\ P_2(X) = (X - a)^2, \cdots, P_n(X) = (X - a)^n.$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(3)[0,5+0,5+0,5+1] Calculer $f(P_0)$, $f(P_1)$, $f(P_2)$ puis $f(P_k)$ pour tout entier $k$ entre 3 et $n$.

(4)[1,5] Ecrire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.

(5)[2] Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(6)[1+2] En déduire $\dim \mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(7)[2] Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_n[X]$.

*Solution de l'exercice 3.* (1) Pour tout réel $\alpha$ et pour tous polynômes $P_1, P_2$ de $\mathbb{R}_[X]$,

$$\begin{aligned} f(\alpha P_1 + P_2) =& (X - a)\left[(\alpha P_1 + P_2)'(X) + (\alpha P_1 + P_2)'(a)\right] \\ &- 2\left[(\alpha P_1 + P_2)(X) - (\alpha P_1 + P_2)(a)\right] \\ =& \alpha\left[(X - a)(P_1'(X) + P_1'(a)) - 2(P_1(X) - P_1(a))\right] \\ &+ \left[(X - a)(P_2'(X) + P_2'(a)) - 2(P_2(X) - P_2(a))\right] \\ =& \alpha f(P_1) + f(P_2). \end{aligned}$$

Comme il est clair que $f(P)$ est encore un polynôme de degré $\leq n$, $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Pour tout entier $k$, le degré de $P_k = (X - a)^k$ est égal à $k$. La famille $\mathcal{B} = (P_0, \cdots, P_n)$ est une famille de polynômes dont la suite des degrés est strictement croissante. Elle est libre.

Puisque son cardinal est $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, la famille $\mathcal{B}$ est libre et maximale dans $\mathbb{R}_n[X]$ : c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(3) Calculons $f(P_k)$, où $P_k(X) = (X - a)^k$.

$$\begin{aligned} &f(P_0) = 0 \\ &f(P_1) = 2(X - a) - 2(X - a) = 0 \\ &f(P_2) = 2(X - a)^2 - 2(X - a)^2 = 0 \\ &f(P_3) = 3(X - a) \times (X - a)^2 - 2(X - a)^3 = (X - a)^3 \end{aligned}$$

et pour tout $k \geq 3$,

$$f(P_k) = k(X - a) \times (X - a)^{k-1} - 2(X - a)^k = (k - 2)(X - a)^k$$

(4) D'où la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & 2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & n-2 \end{pmatrix}$$

(5) Comme $f(P_0) = f(P_1) = f(P_2) = 0$ et

$$\forall k \geq 3, \quad f(P_k) = (k - 2)P_k$$

il en découle que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, f &= \mathrm{Vect}\left(f(P_0), f(P_1), \cdots, f(P_n)\right) = \mathrm{Vect}\left(f(P_3), \cdots, f(P_n)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(P_3, \cdots, P_n\right) \end{aligned}$$

Pour des raisons de degré, la famille $(P_3, \cdots, P_n)$ est libre. Etant génératrice de $\operatorname{Im} f$, $(P_3, \ldots P_n)$ est une base de $\operatorname{Im} f$. Donc la dimension de $\operatorname{Im} f$ est $n + 1 - 3 = n - 2$.

(6) On déduit que $\dim(\operatorname{Ker} f) = n + 1 - \dim(\operatorname{Im} f) = n + 1 - n + 2 = 3$. Comme $P_0, P_1, P_2 \in \operatorname{Ker} f$ et compte tenu de la dimension de $\operatorname{Ker} f$, la famille $(P_0, P_1, P_2)$ est donc une base de $\operatorname{Ker} f$.

(7) La réunion des deux bases $(P_0, P_1, P_2)$ et $(P_3, \cdots, P_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (d'après la question (3)), on conclut que les sous-espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$, c-à-d. $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}_n[X]$.