CHAPITRE 6
MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Table des matières

Partie I. Matrice d'une application linéaire 1
1. Représentations matricielles 1
2. Matrice d'une application linéaire 3
3. Application du calcul matriciel aux applications linéaires 5
4. Isomorphismes et matrices inversibles 7

Partie II. Formules de changement de bases 9
5. Matrice de passage 9
6. Formules de changement de bases 10

Partie III. Retour sur le rang d'une matrice et d'une application linéaire 12
7. Définition 12
8. Propriétés 14

PARTIE I
MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

1. Représentations matricielles

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit d'une manière unique $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ avec $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Définition 1.1. — *On appelle matrice des composantes dans $\mathcal{B}$ du vecteur x la matrice colonne dont les coefficients sont les composantes $x_1 \cdots, x_n$ de x dans la base $\mathcal{B}$. On note*

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Exemple 1.2. — On a pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = E_i \tag{1}$$

Proposition 1.3. — *L'application $M_{\mathcal{B}} : x \mapsto \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un isomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*

Démonstration. — L'application $M_{\mathcal{B}}$ est linéaire car l'application qui à un vecteur associe l'une des ses composantes dans $\mathcal{B}$ est linéaire.

L'application $M_{\mathcal{B}}$ est bijective car pour toute matrice colonne X de coefficients $(x_1, \cdots, x_n)$ il existe un unique vecteur dont les composantes dans $\mathcal{B}$ sont $(x_1, \cdots, x_n)$ à savoir le vecteur $x = x_1e_1 + \cdots x_ne_n$. □

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.

Pour tout $1 \leq j \leq p$, notons C_j la colonne des composantes dans $\mathcal{B}$ du vecteur v_j.

Définition 1.4. — *On appelle matrice des composantes dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $\mathcal{F}$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les colonnes $C_1, C_2, \cdots, C_p$ des composantes dans $\mathcal{B}$ des vecteurs $v_1, \cdots, v_p$. On note*

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Exemples 1.5. — (a) Pour tout $1 \leq i \leq n$, d'après (1) on a $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i) = E_i$, donc

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, \cdots, e_n) = I_n.$$

(b) Considérons $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et soit les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 3),\ v_2 = (2, 0, 1),\ v_3 = (1, 0, 1),\ v_4 = (2, 1, 1).$$

Alors

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

(c) Considérons $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et soit les polynômes

$$P_0 = 1,\ P_1 = 1 + X,\ P_2 = 1 + 2X + X^2,\ P_3 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$$

Alors

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

2. Matrice d'une application linéaire

Définition 2.1. — *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n et munis des bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ respectivement. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
On appelle **matrice de l'application linéaire** f *la matrice*

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B})) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \cdots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Ainsi, si pour tout $1 \leq j \leq p$, $f(e_j) = a_{1,j}e'_1 + \cdots + a_{n,j}e'_n$, alors

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & (e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 2.2. — La matrice représentative de f dépend du choix des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F, il est donc nécessaire de préciser celles-ci.

Exemples 2.3. — (a) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y).$$

Déterminons la matrice de f relativement aux bases canoniques $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

On a

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & f(1,0,0) = (1,1) = e'_1 + e'_2 \\ f(e_2) & = & f(0,1,0) = (2,-1) = 2e'_1 - e'_2 \\ f(e_3) & = & f(0,0,1) = (-1,0) = -e'_1 \end{array}$$

Donc

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(P) = (P(a), P(b), P(c))$$

Considérons les bases canoniques $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$

On a

$$\begin{aligned} f(1) &= (1,1,1) \\ f(X) &= (a,b,c) \\ f(X^2) &= (a^2,b^2,c^2) \\ f(X^3) &= (a^3,b^3,c^3) \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}$$

Définition 2.4. — *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.*

On appelle matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée. Cette matrice est notée $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Autrement dit

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).$$

Exemples 2.5. — (a) La matrice de l'endomorphisme Id_E dans base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E(e_1), \cdots, \mathrm{Id}_E(e_n)) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, \cdots, e_n) = I_n.$$

(b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par

$$f(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$$

Relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice de f est

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant la famille de vecteurs

$$\epsilon_1 = (1,1,1),\ \epsilon_2 = (1,1,0),\ \epsilon_3 = (1,0,0)$$

Il est facile de vérifier que la famille $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer la matrice de f dans cette base, il suffit de calculer les composantes de $f(\epsilon_1) = (2,2,2)$, $f(\epsilon_2) = (1,1,2)$, $f(\epsilon_3) = (0,1,1)$ en fonction de ϵ_1, ϵ_2 et ϵ_3. On trouve

$$f(\epsilon_1) = 2\epsilon_1,\ f(\epsilon_2) = 2\epsilon_1 - \epsilon_2,\ f(\epsilon_3) = \epsilon_1 - \epsilon_3$$

Donc

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Application du calcul matriciel aux applications linéaires

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$.

Pour $x \in E$ et $y \in F$, on note $X = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(y)$ les matrices colonnes des composantes de x et y dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement.

Théorème 3.1. — *Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ on a, $\forall x \in E, \forall y \in F$*

$$y = f(x) \iff Y = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)X \tag{2}$$

Démonstration. — Posons $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{i,j})$ et $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. Donc $f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j)$. Or pour tout $1 \leq j \leq p$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i$, on en déduit

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_j e'_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} e_{i,j} x_j \right) e'_i$$

Posons $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i$. Par identification des composantes, on a

$$y = f(x) \iff \forall 1 \leq i \leq n, y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$$

Parallèlement

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$$

Donc

$$Y = AX \iff \forall 1 \leq i \leq n,\ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$$

Ainsi

$$y = f(x) \iff Y = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)X$$

□

Exemple 3.2. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E$. On peut calculer le vecteur $f(x)$ par produit matriciel

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f(x)) = AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$.

Théorème 3.3. — *L'application $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

Démonstration. — Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Posons $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et $B = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$.

Pour $x \in E$, on a $(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x)$. Or successivement,

$$\begin{aligned} \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(x)) &= \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = AX \\ \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(g(x)) &= \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = BX \\ \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(x) + \lambda g(x)) &= AX + \lambda BX \\ &= (A + \lambda B)X \\ &= \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}((f + \lambda g)(x)) \end{aligned}$$

Par unicité de la matrice permettant de calculer les composantes d'un vecteur image, on a

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f + \lambda g) = A + \lambda B = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \lambda \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g).$$

Ainsi l'application $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est linéaire.

Soit $f \in \mathbf{Ker}\, M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. On a $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = O_{n,p}$. Soit $x \in E$ et soit $X = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. On a

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f(x)) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = O_{n,p} \times X = O_{n,1} = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{0}_F)$$

On en déduit que $f = 0$ est l'application nulle, puis que $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est injective.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et considérons l'application $f : E \to F$ qui envoie un vecteur $x \in E$ de matrice composantes X dans $\mathcal{B}$ sur le vecteur $y \in F$ de matrice composantes AX dans $\mathcal{B}'$. On peut vérifier sans peine que f est linéaire. De plus, par construction $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A$. Ainsi l'application $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est surjective et finalement c'est un isomorphisme.

$\square$

Corollaire 3.4. — *Si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et*

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F.$$

En particulier, $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$ *et* $\dim E^* = \dim E$.

Démonstration. — Posons $p = \dim E$ et $n = \dim F$. Par l'isomorphisme du théorème précédent, $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p = \dim E \times \dim F$. □

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ et $\mathcal{B}'' = (e''_1, \cdots, e''_m)$.

Théorème 3.5. — *Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $g \in \mathcal{L}(F,G)$ on a*

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Démonstration. — Soit $x \in E$. Posons $y = f(x)$, $z = g(y) = g \circ f(x)$, $X = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(y)$ et $Z = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}''}(z)$. On a

$$Y = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(x)) = AX \quad \text{et} \quad Z = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}''}(g(y)) = BY$$

Donc

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}''}(g \circ f(x)) = BY = (BA)X$$

Par unicité de la matrice permettant de calculer les composantes d'un vecteur image, on a

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = BA = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

□

Corollaire 3.6. — *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f^m) = (\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^m$$

où $f^m = f \circ \cdots \circ f$, m fois.

4. Isomorphismes et matrices inversibles

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$.

Théorème 4.1. — *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. On a équivalence entre :*

(a) f est un isomorphisme;

(b) A est inversible.

De plus, si tel est le cas, alors

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}.$$

Démonstration. — (a) $\Rightarrow$ (b) Supposons que f est un isomorphisme. Puisque $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, on a $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$. Or $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. Ainsi en posant $B = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})$ on a $BA = I_n$, donc A est inversible et $A^{-1} = B = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supposons A inversible. Considérons l'application linéaire $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) = A^{-1}$. Puisque $A^{-1}A = I_n$, on a

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

et donc $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. On peut donc affirmer que f est un isomorphisme et que g est son isomorphisme inverse. □

Exemple 4.2. — Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(P) = (P(0), P(1), P(2)).$$

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$. On a

$$A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Un calcul direct montre que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On en déduit que l'application linéaire f est un isomorphisme.

Soit $x = (a, b, c)$ et $X = \mathbf{Mat}_{\mathcal{C}}(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}(x)) &= A^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ -3a/2 + 2b - c/2 \\ a/2 - b + c/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ est donné par :

$$f^{-1}(a, b, c) = a + (-3a/2 + 2b - c/2)X + (a/2 - b + c/2)X^2.$$

Cet isomorphisme inverse permet de résoudre un problème d'interpolation, à savoir déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ prenant des valeurs donnée en $0, 1, 2$. Par exemple $P(0) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 2$. Ce polynôme est donc

$$f^{-1}(1, 0, 2) = 1 - \frac{5}{2}X + \frac{3}{2}X^2.$$

PARTIE II
FORMULES DE CHANGEMENT DE BASES

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et m, n, p, q, r désignent des entiers naturels. E, F, G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

5. Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensio n muni de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$.

Définition 5.1. — *On appelle* **matrice de passage** *de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice*

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \cdots, e'_n).$$

Exemple 5.2. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, , e'_3)$ la famille de vecteurs

$$\begin{array}{rcl} e'_1 & = & e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 & = & e_2 - e_3 \\ e'_3 & = & -2e_1 + 2e_2 - e_3 \end{array}$$

On vérifie facilement que $\mathcal{B}'$ est une base de E (elle est libre maximale). la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Proposition 5.3. — *Si $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, alors*

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

Démonstration. — Par définition

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}(e'_1), \cdots, \mathrm{Id}e'_n)) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \cdots, e'_n) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

□

Remarque 5.4. — Ici la matrice de l'endomorphisme Id_E n'est pas la matrice de l'identité car la représentation matricielle de l'identité est formée en choisissant une base à l'arrivée qui n'est pas a priori la même que la base au départ.

Proposition 5.5. — *Si P est la matrice de de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ alors P est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice de de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$,*

$$P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}.$$

Démonstration. — Notons Q la matrice de de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. On a $P = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ et $Q = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$, donc

$$\begin{aligned} PQ &= \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) \\ &= \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n. \end{aligned}$$

Donc P est inversible et son inverse est Q. □

Exemple 5.6. — Reprenons l'exemple précédent

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

L'inverse de P exprime e_1, e_2, e_3 en fonction de e'_1, e'_2, e'_3

$$P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

6. Formules de changement de bases

Proposition 6.1. — *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$.*
Soit $x \in E$ et notons $X = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors $X = PX'$ où P est la matrice de passage de de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. D'où la formule

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\,\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(x).$$

Démonstration. — On a

$$X = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}(x)) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})\,\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = PX'$$

□

Corollaire 6.2. — *On a aussi,*

$$X' = P^{-1}X.$$

Théorème 6.3 **(Formule de changement de bases)**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ dont on note $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $A' = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. Alors on a

$$A' = Q^{-1}AP$$

où $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et $Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$. On retient donc la formule

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C})\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

Démonstration. — Soit $x \in E$, $X = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Soit de même $y \in F$, $Y = \mathbf{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$ et $Y' = \mathbf{Mat}_{\mathcal{C}'}(y)$. On a $X = PX'$ et $Y = QY'$. Donc

$$y = f(x) \iff Y = AX \iff QY' = APX' \iff Y' = Q^{-1}APX'$$

Or la matrice A' est l'ubique matrice telle que

$$y = f(x) \iff Y' = A'X'$$

Par conséquent, $A' = Q^{-1}AP$. □

Remarque 6.4. — On peut aussi retenir que le diagramme suivant est commutatif : $f = \mathrm{Id}_2 \circ f \circ \mathrm{Id}_1 \iff A' = Q^{-1}AP$

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "f", "A"'] & (F,\mathcal{C}) \arrow[d, "Q^{-1}"', "\mathrm{Id}_2"] \\
(E,\mathcal{B}') \arrow[u, "\mathrm{Id}_1", "P"'] \arrow[r, "A'", "f"'] & (F,\mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

Théorème 6.5 **(Formule de changement de bases d'un endomorphisme)**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et notons $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors on a

$$A' = P^{-1}AP$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Exemple 6.6. — Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$. Considérons la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2; e'_3)$ définie par

$$\begin{aligned} e'_1 &= (0,1,-1) = e_2 - e_3 \\ e'_2 &= (1,-1,1) = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_3 &= (1,-1,2) = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$D = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(-1, 2, 3)$$

De cette formule, on peut calculer les puissances A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. En effet, on a $A = PDP^{-1}$ et

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}$$

Or $D^n = \mathrm{diag}((-1)^n, 2^n, 3^n)$. On trouve alors

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & -2^n + 3^n & -2^n + 3^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^n - 3^n & 2^n - 3^n \\ -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n - 2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

PARTIE III
RETOUR SUR LE RANG D'UNE MATRICE ET D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

7. Définition

Nous allons tout d'abord faire quelques rappels.

Si $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_p)$ est une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors on appelle rang de la famille $\mathcal{F}$ la dimension de l'espace engendrée par $\mathcal{F}$,

$$\mathrm{rang}(\mathcal{F}) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p).$$

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors on appelle rang de l'application linéaire f la dimension de l'image de f,

$$\operatorname{rang}(f) = \dim \mathbf{Im}\, f.$$

Ces deux définitions sont liées puisque si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de E alors $\mathbf{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ et

$$\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(f(e_1), \cdots, f(e_p)).$$

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, C_2, \cdots, C_p$. Les C_j sont des vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on peut donc considérer le rang de la famille de vecteurs $(C_1, C_2, \cdots, C_p)$.

Définition 7.1. — *On appelle* **rang** *d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le rang de la famille $(C_1, C_2, \cdots, C_p)$ des colonnes de A. On note*

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(C_1, C_2, \cdots, C_p).$$

Théorème 7.2. — *Si $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et si A est la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E alors*

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(x_1, \cdots, x_p).$$

Démonstration. — Soit $\varphi : E \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(x) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. Il est facile de voir que φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriels. Puisque les colonnes de A sont les $C_j = \varphi(x_j)$, on a

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_p)) = \dim \operatorname{Vect}(\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_p))$$

Or puisque φ est une application linéaire injective donc

$$\dim \operatorname{Vect}(\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_p)) = \dim \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_p) = \operatorname{rang}(x_1, \cdots, x_p)$$

Ainsi

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(x_1, \cdots, x_p).$$

$\square$

Exemple 7.3. — Pour $0 \leq r \leq \min(n,p)$, on note J_r la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$J_r = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Précisément, les coefficients de $J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont nuls sauf le coefficient d'indice (i,i) est égal à 1 pour $i \in \{1, \cdots, r\}$. On a

$$\operatorname{rang}(J_r) = r$$

En effet, si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$ alors la matrice J_r peut se voir comme la matrice de la famille formée des p vecteurs $(e_1, \cdots, e_r, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})$ dans $\mathcal{B}$. Cette dernière est de rang r car la sous-famille $(e_1, \cdots, e_r)$ est libre et donc $\operatorname{rang}(J_r) = r$.

Théorème 7.4. — *Si f est une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F et si A est la matrice de f relative à des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F alors*

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(f).$$

Démonstration. — Si l'on note $e_1, \cdots, e_p$ les vecteurs constituant la base $\mathcal{B}$ alors A est la matrice de la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$ et par suite $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(f(e_1), \cdots, f(e_p)) = \operatorname{rang}(f)$. □

8. Propriétés

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A, c'est-à-dire l'application linéaire représentée par la matrice A relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

Puisque $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(f)$, les propriétés relatives au rang d'applications linéaires se transposent aux matrices. Comme $\operatorname{rang}(f) \leq \min(\dim \mathbb{K}^p, \dim \mathbb{K}^n)$, on a :

Proposition 8.1. — *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rang}(A) \leq \min(n, p)$.*

Proposition 8.2. — *$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,*

$$\operatorname{rang}(AB) \leq \min(\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)).$$

De plus :
Si A est une matrice carrée inversible alors $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(B)$.
Si B est une matrice carrée inversible alors $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(A)$.

Démonstration. — Soient f l'application linéaire représentée par la matrice A relativement aux base canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ et g l'application linéaire représentée par la matrice B relativement aux base canoniques de $\mathbb{K}^q$ et $\mathbb{K}^p$. Comme $\operatorname{rang}(f \circ g) \leq \min(\operatorname{rang}(f), \operatorname{rang}(g)$, on a $\operatorname{rang}(AB) \leq \min(\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B))$.

De plus $\operatorname{rang}(f \circ g) = \operatorname{rang}(f)$ si g est surjective et $\operatorname{rang}(f \circ g) = \operatorname{rang}(g)$ si f est injective. Cela démontre la deuxième partie de la proposition.

□

Remarque 8.3. — D'après cette proposition on ne modifie par le rang d'une matrice en multipliant celle-ci par une matrice inversible.

Théorème 8.4. — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On a équivalence entre :*
(a) *A est inversible;*
(b) $\mathrm{rang}(A) = n$.

Démonstration. — Soit f l'application linéaire représentée par la matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a A est inversible si, et seulement si, f est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ i.e. si, et seulement si, $\mathrm{rang}(f) = n$. □

Théorème 8.5. — *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq r \leq \min(n, p)$. On a équivalence entre :*
(a) $\mathrm{rang}(A) = r$;
(b) $\exists P \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{K})$, $\exists Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $A = QJ_rP$.

Démonstration. — $(a) \Rightarrow (b)$: découle de la remarque 7.3 et la remarque 8.3.

$(b) \Rightarrow (a)$: Soit $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire représentée par la matrice A relativement aux bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^n$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.
Puisque $r = \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(f)$, on a $\dim \mathbf{Ker}\, f = p - r$ en vertu de la formule du rang. Soit H un supplémentaire de $\mathbf{Ker}\, f$ dans $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_r, e'_{r+1}, \cdots, e'_p)$ une base adaptée à la supplémentarité de H et $\mathbf{Ker}\, f$ dans E.
Posons $v_1 = f(e'_1), \cdots, v_r = f(e'_r)$. Ce sont des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Supposons $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = \mathbf{0}$. On a $f(\lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_r e'_r) = \mathbf{0}$ et donc $\lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_r e'_r \in \mathbf{Ker}\, f$. Or $\lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_r e'_r \in H$ et $H \cap \mathbf{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$, donc $\lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_r e'_r = \mathbf{0}$. Puisque la famille $(e'_1, \cdots, e'_r)$ est libre, on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. Ainsi la famille $(v_1, \cdots, v_r)$ est libre. Complétons-la en une base de $\mathbb{K}^n$ de la forme $\mathcal{C}' = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$.
Par construction, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = J_r$$
et par formule de changement de bases, on obtient $A = QJ_rP$ avec $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{K})$ et $Q = P_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. □

Corollaire 8.6. — *$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a*
$$\mathrm{rang}(A^\top) = \mathrm{rang}(A).$$

Démonstration. — Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On peut écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles et $r = \mathrm{rang}(A)$. On a alors $A^\top = P^\top J_r^\top Q^\top$ avec $P^\top, Q^\top$ inversibles. il en résulte que $\mathrm{rang}(A^\top) = \mathrm{rang}(J_r^\top) = r$, puisque la matrice $J_r^\top$ est analogue à la matrice J_r sauf qu'elle est de type (p, n) au lieu d'être de type (n, p). □

---

version 1, May 15, 2024