CHAPITRE 5
APPLICATIONS LINÉAIRES

Table des matières

Introduction

Dans les exemples qui suivent la définition d'un espace vectoriel, nous avons exprimé l'intuition que certains espaces sont "les mêmes" que d'autres. Par exemple, l'espace des vecteurs à deux colonnes et celui des vecteurs à deux lignes ne sont pas égaux parce que leurs éléments - les vecteurs à deux colonnes et les vecteurs à deux lignes - ne sont pas égaux, mais nous avons dit que ces espaces ne diffèrent que par la façon dont leurs éléments apparaissent. Nous allons dans ce chapitre préciser cette intuition.

April 8, 2024, Khalid Koufany

Nous commençons par deux exemples qui suggèrent la bonne définition.

L'espace de vecteurs lignes et l'espace des vecteurs de colonnes sont"les mêmes"en ce sens que nous pouvons associer les vecteurs qui ont les mêmes composantes, par exemple,

$$(1,5) \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

(lire la double flèche comme "correspond à"). Cette association respecte l'addition et la multiplication scalaire. Par exemple,

$$\begin{aligned}(1,2)+(2,3)=(3,5) \quad &\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\\ 2\cdot(1,3)=(2,6) \quad &\longleftrightarrow \quad 2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'une manière générale,

$$(x_1,x_2) \longleftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Les deux opérations sont respectées par

$$\begin{aligned}(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2) \quad &\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}\\ \lambda\cdot(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2) \quad &\longleftrightarrow \quad \lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Deux autres espaces que l'on peut considérer comme "les même"sont l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré ≤ 2 et $\mathbb{R}^3$. Une correspondance naturelle est donnée par

$$a_0+a_1X+a_2X^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix} \qquad \text{par exemple } 1+2X+3X^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Cela préserve la structure d'espace vectoriel : cette correspondance respecte l'addition et la multiplication scalaire,

$$\begin{array}{rr} & a_0+a_1X+a_2X^2\\ + & b_0+b_1X+b_2X^2\\ \hline = & (a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+(a_2+b_2)X^2\end{array}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0+b_0\\a_1+b_1\\a_2+b_1\end{pmatrix}$$

et

$$\lambda \cdot (a_0 + a_1 X + a_2 X^2) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)X + (\lambda a_2)X^2 \longleftrightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_0 \\ \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}.$$

PARTIE I
APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans la suite, E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Applications linéaires

Définition 1.1. — *On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est* **linéaire** *si*
(a) $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$;
(b) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

On dira parfois **application $\mathbb{K}$-linéaire** *pour préciser le corps des scalaires, On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

La proposition suivante est une conséquence de la définition.

Proposition 1.2. — *Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.*

Démonstration. — $f(\mathbf{0}_E) = f(\mathbf{0}_E + \mathbf{0}_E) = f(\mathbf{0}_E) + f(\mathbf{0}_E)$ et en ajoutant l'opposé du vecteur $f(\mathbf{0}_E)$ à gauche et à droite on trouve $\mathbf{0}_F = f(\mathbf{0}_E)$. □

Proposition 1.3 **(Caractérisation des applications linéaires)**
Soit $f\colon E \to F$ une application. On a équivalence entre :
(i) f est une application linéaire;
(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Démonstration. — Supposons (i). Soit $\lambda \in \mathbb{K}, x, y \in E$. On a $\lambda x, y \in E$ et d'après (a) de la définition 1.1, $f(\lambda x + y) = f(\lambda x) + f(y)$, ensuite d'après (b) de la même définition on a $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. D'où (ii).

Supposons (ii), alors pour $x, y \in E$ et $\lambda = 1$, on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Ensuite pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$ avec $y = \mathbf{0}_E$ on a $f(\lambda x) = f(\lambda x + \mathbf{0}_E) = \lambda f(x) + f(\mathbf{0}_E) = \lambda f(x)$ d'après la proposition 1.2. Donc f est linéaire.
□

Remarque 1.4. — Il est facile de voir que la précédente caractérisation est équivalente à la suivante :

$$f \text{ est linéaire } \iff \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Exemples 1.5. — (a) Montrons que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, x + z, y)$ est linéaire.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda v_1 + v_2) &= f(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2) \\ &= (\lambda x_1 + x_2 - \lambda y_1 - y_2, \lambda x_1 + x_2 + \lambda z_1 + z_2, \lambda y_1 + y_2) \\ &= \lambda(x_1 - y_1, x_1 + z_1, y_1) + (x_2 - y_2, x_2 + z_2, y_2) \\ &= \lambda f(v_1) + f(v_2). \end{aligned}$$

(b) L'application nulle $\theta : E \to F$ définie par $\forall x \in E$, $f(x) = \mathbf{0}_F$ est linéaire.
En effet, soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$. On a $f(\lambda x + y) = \mathbf{0}_F$, $f(x) = \mathbf{0}_F$ et $f(y) = \mathbf{0}_F$. Donc clairement $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

(c) Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$[(1)] et $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues. L'application

$$\varphi : E \to F,\ \ \varphi(f) = f + 2f'$$

est linéaire. En effet, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in E$, $\varphi(\lambda f + g) = (\lambda f + g) + 2(\lambda f + g)' = \lambda(f + 2f') + (g + 2g') = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$.

On peut dédire de cet exemple que l'application dérivation

$$D(f) = f'$$

est une application linéaire.

(d) Soit $E = F = \mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \bar{z}$ est linéaire. En effet, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $f(\lambda z + w) = \overline{\lambda z + w} = \lambda\bar{z} + \bar{w} = \lambda f(z) + f(w)$.

Par contre si on considère $E = F = \mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, cette application n'est plus linéaire, car par exemple $f(i) = \bar{i} = -i$ par définition de f, mais $f(i) = f(i \times 1) = if(1) = i$ par $\mathbb{C}$-linéarité.

En cas d'ambiguïtés, il peut être nécessaire de préciser le corps des scalaires des espaces vectoriels E et F : l'application $z \mapsto \bar{z}$ est donc $\mathbb{R}$-linéaire mais pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Proposition 1.6. — *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si $v_1, \cdots, v_n$ sont des vecteurs de E alors $\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,*

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n).$$

---

(1) une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction dérivable et dont la dérivée est continue

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n=2$ cela revient à utiliser la caractérisation d'une application linéaire. Supposons maintenant le résultat vrai pour $n \geq 2$ et soit $v_1, \cdots, v_n, v_{n+1}$ des vecteurs de E. On a alors

$$\begin{aligned} f(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j v_j) &= f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j + \lambda_{n+1} v_{n+1}) \\ &= f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j) + \lambda_{n+1} f(v_{n+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(v_j) + \lambda_{n+1} f(v_{n+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(v_j). \end{aligned}$$

□

2. Applications linéaires particulières

2.1. Formes linéaires. — *Une* **forme linéaire** *sur un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel est une application linéaire de* E *vers* $\mathbb{K}$.
On note l'ensemble des formes linéaires sur E *par* $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ *ou* E^* *et on l'appelle* **dual** *de* E.

Exemples 2.1. — (a) Pour $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ fixés, l'application $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ définie par

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots a_n x_n$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

(b) Soit $a \leq b$ deux nombres réels. L'application $\Phi : \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f) = \int_a^b f(t) dt$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, on a $\Phi(\lambda f + g) = \int_a^b (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt = \lambda \Phi(f) + \Phi(g)$.

2.2. Endomorphismes. — *On appelle* **endomorphisme** *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*, une application linéaire de* E *dans* E.
On note $\mathcal{L}(E)$ *ou* $\mathcal{L}(E, E)$ *l'ensemble des endormorphismes de* E.

Exemples 2.2. — (a) L'application identité $\mathrm{Id}_E\colon E \to E$ est un endomorphisme de E.

(b) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

est une endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

(c) L'application $D\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $D(P) = P'$ est une endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2.3. Isomorphismes. — *Une application linéaire bijective $f\colon E \to F$ est appelée* **isomorphisme** *de E sur F. Dans ce cas on dira que les espaces E et F sont isomorphes.*

Exemple 2.3. — L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ définie par $f(a, b) = a + ib$ est une $\mathbb{R}$-application linéaire bijective. C'est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$ (ici $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Proposition 2.4. — *Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont deux isomorphismes alors $g \circ f : E \to G$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — La composée d'une bijection de E sur F et d'une bijection de F sur G est une bijection de E sur G et la composée de deux applications linéaires est une application linéaire. □

Proposition 2.5. — *Si $f : E \to F$ est un isomorphisme de E sur F alors la bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme de F sur E.*

Démonstration. — L'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est une bijection. Montrons que c'est une application linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $y, y' \in F$. Alors il existe $x, x' \in E$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$.
Par linéarité de f,

$$f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x') = \lambda y + y'$$

et par bijectivité de f,

$$\lambda x + x' = f^{-1}(\lambda y + y')$$

ou encore (puisque $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$)

$$\lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(y') = f^{-1}(\lambda y + y').$$

□

Exemple 2.6. — L'application $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(z) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$$

est un $\mathbb{R}$-isomorphisme dont l'isomorphisme réciproque est l'application

$$f\colon \mathbb{R}^2 \ni (a, b) \mapsto a + ib \in \mathbb{C}.$$

Les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels isomorphes.

2.4. Automorphismes. — *On appelle* **automorphisme** *de E, tout endomorphisme de E bijectif (ou tout isomorphisme de E sur E).*
On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Exemple 2.7. — (a) L'application identité $\mathrm{Id}_E : E \to E$ est un automorphisme de E.

(b) L'application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(z) = \bar{z} \in \mathbb{C}$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$. En effet, f est linéaire et $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$.

La proposition suivante est facile à établir.

Proposition 2.8. — *(a) Si f est un automorphisme de E alors f^{-1} est un automorphisme de E.*

(b) Si f et g sont deux automorphismes de E alors $f \circ g$ est un automorphisme de E.

3. Noyau et image d'une application linéaire

Théorème 3.1. — *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

(a) Si V est un sous-espace vectoriel de E, alors son image

$$\begin{aligned} f(V) &:= \{f(x) \mid x \in V\} \\ &= \{y \in F \mid \exists x \in V,\ f(x) = y\} \end{aligned}$$

est un sous-espace vectoriel de F.

(b) Si W est un sous-espace vectoriel de F, alors son image réciproque

$$f^{-1}(W) := \{x \in E \mid f(x) \in W\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. — (a) Soit V un s.e.v. de E. On a $f(V) \subset F$ et $\mathbf{0}_F \in f(V)$ car $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $w_1, w_2 \in f(V)$. Alors $w_1 = f(v_1)$ et $w_2 = f(v_2)$ avec $v_1, v_2 \in V$. On a $\lambda w_1 + w_2 = \lambda f(v_1) + f(v_2) = f(\lambda v_1 + v_2) \in f(V)$, donc $f(V)$ est un s.e.v. de F.

(b) Soit W un s.e.v. de F. Par définition l'image réciproque de W on a $f^{-1}(W) \subset E$ et $\mathbf{0}_E \in f^{-1}(W)$ car $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2 \in f^{-1}(W)$. Alors $f(v_1) \in W$ et $f(v_2) \in W$. Comme W est un s.e.v. de F, $\lambda f(v_1) + f(v_2) \in W$ et par linéarité de f on a $f(\lambda v_1 + v_2) \in W$. Donc $\lambda v_1 + v_2 \in f^{-1}(W)$ et $f^{-1}(W)$ est un s.e.v. de E. $\square$

Définition 3.2. — *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*
(a) On appelle **image** *de f le sous-espace vectoriel de F*

$$\mathbf{Im}(f) := f(E) = \{f(v) \mid v \in E\}.$$

(b) On appelle **noyau** *de f le sous-espace vectoriel de E*

$$\mathbf{Ker}(f) := f^{-1}(\{\mathbf{0}_F\}) = \{v \in E \mid f(v) = \mathbf{0}_F\}.$$

Exemples 3.3. — (a) Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x-y, y-x)$.
Soit $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$v \in \mathbf{Ker}(f) \iff f(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \iff (x-y, y-x) = (0,0) \iff x = y$$

Donc $\mathbf{Ker}(f) = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1,1)$.
Soit $w = (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} w \in \mathbf{Im}(f) &\iff \exists v = (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(v) = w \\ &\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x - y = a \\ -x + y = b \end{cases} \\ &\iff a = -b \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{Im}(f) = \{(a,-a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \{a(1,-1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1,-1)$.
(b) Soit $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables et dont la dérivée est continue.
Considérons l'application linéaire $D : \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ définie par $D(f) = f'$.
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$,

$$f \in \mathbf{Ker}(D) \iff f' = 0_{\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})} \iff f \text{ constante}$$

Donc $\mathbf{Ker}(D) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ constante}\}$.
Soit $g \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$,
Si $g \in \mathbf{Im}(D)$ alors $\exists f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $g = f'$, d'où g est continue. Inversement, si g est une fonction continue, alors g admet une primitive f et celle-ci est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi les valeurs prises par D sont exactement les fonctions continues sur $[0,1]$. Par suite $\mathbf{Im}(D) = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Théorème 3.4. — *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*
(a) *f est surjective $\iff$ $\mathbf{Im}(f) = F$;*
(b) *f est injective $\iff$ $\mathbf{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$.*

Démonstration. — (a) est immédiate par la définition de la surjectivité.

(b) supposons f injective. Soit $v \in E$,

$$\begin{array}{rcl} v \in \mathbf{Ker}(f) & \iff & f(v) = \mathbf{0}_F \\ & \iff & f(v) = f(\mathbf{0}_E) \text{ car } f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F \\ & \iff & v = \mathbf{0}_E \ \text{ par définition de l'injectivité} \end{array}$$

Donc $\mathbf{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$.

Inversement, supposons $\mathbf{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$. Soit $v, w \in E$,

$$\begin{array}{rcl} f(v) = f(w) & \iff & f(v) - f(w) = \mathbf{0}_F \\ & \iff & f(v - w) = \mathbf{0}_F \text{ par linéarité de } f \\ & \iff & v - w \in \mathbf{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\} \\ & \iff & v = w \end{array}$$

Donc f est injective. □

4. Structures de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$

Théorème 4.1. — *$(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration. — Montrons que $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E, F), +, \cdot)$.

$\mathcal{L}(E, F), \subset \mathcal{F}(E, F)$ et l'application nulle $\theta \colon E \to F$, $\theta(v) = \mathbf{0}_F$ est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et tout $v, w \in E$

$$\begin{array}{rcl} (\lambda f + g)(\alpha v + w) & = & \lambda f(\alpha v + w) + g(\alpha v + w) \\ & = & \lambda[\alpha f(v) + f(w)] + \alpha g(v) + g(w) \\ & = & \alpha[\lambda f(v) + g(v)] + \lambda f(w) + g(w) \\ & = & \alpha[\lambda f + g](v) + [\lambda f + g](w). \end{array}$$

Donc $\lambda f + g$ est linéaire, c-à-d. $\in \lambda f + g \in \mathcal{L}(E, F)$ et par conséquent $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Corollaire 4.2. — *$(\mathcal{L}(E, \mathbb{K}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

Les deux propositions suivantes sont faciles à établir.

Proposition 4.3. — $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $\forall h \in \mathcal{L}(F, G)$,

$$h \circ (\lambda f + g) = \lambda h \circ f + h \circ g.$$

Proposition 4.4. — $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall h \in \mathcal{L}(E, F)$, $\forall f, g \in \mathcal{L}(F, G)$,

$$(\lambda f + g) \circ h = \lambda f \circ h + g \circ h.$$

Théorème 4.5. — *$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un* **anneau**, *c-à-d.*

- *$(\mathcal{L}(E), +)$ vérifie les cinq propriétés liées à l'addition de l'espace vectoriel $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$;*
- *La loi $\circ$ est associative; $\forall f, g, h \in \mathcal{L}(E)$*
$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$
- *La loi $\circ$ distribue $+$ à gauche et à droite; $\forall f, g, h \in \mathcal{L}(E)$,*
$$f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h) \quad \text{et} \quad (f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$$
- *La loi $\circ$ admet un élément neutre; $\forall f \in \mathcal{L}(E)$,*
$$\mathrm{Id}_E \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f.$$

Démonstration. — Toutes ces propriétés sont faciles à établir. □

Définition 4.6. — *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note*
$$f^0 = \mathrm{Id}_E,\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f \quad \text{et} \quad f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad (n \text{ facteurs})$$

***Proposition 4.7* (Noyaux et images itérés).** — *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a*
$$\{\mathbf{0}_E\} \subset \mathbf{Ker}(f) \subset \mathbf{Ker}(f^2) \subset \cdots \subset \mathbf{Ker}(f^n) \subset \mathbf{Ker}(f^{n+1}) \subset \cdots \subset E;$$
$$E \supset \mathbf{Im}(f) \supset \mathbf{Im}(f^2) \supset \cdots \supset \mathbf{Im}(f^n) \supset \mathbf{Im}(f^{n+1}) \supset \cdots \supset \{\mathbf{0}_E\}.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout n, $\mathbf{Ker}(f^n) \subset \mathbf{Ker}(f^{n+1})$ et $\mathbf{Im}(f^n) \supset \mathbf{Im}(f^{n+1})$.
Montrons la première inclusion. Si $v \in \mathbf{Ker}(f^n)$, alors $f^n(v) = \mathbf{0}_E$, donc $f^{n+1}(v) = f(f^n(v)) = f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_E$. D'où $v \in \mathbf{Ker}(f^{n+1})$.
Montrons la deuxième inclusion. Si $w \in \mathbf{Im}(f^{n+1})$, alors $\exists v \in E$ tel $f^{n+1}(v) = w$ et donc $f^n(f(v)) = w$ ce qui veut dire $w \in \mathbf{Im}(f^n)$. □

Remarque 4.8. — La loi de composition $\circ$ de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ n'est pas en général commutative :

- L'itéré $(f \circ g)^n$ ne correspond pas $f^n \circ g^n$, il doit être compris comme
$$(f \circ g)^n = (f \circ g) \circ (f \circ g) \circ \cdots \circ (f \circ g) \quad n \text{ fois}$$
- Le carré d'une somme se dévéloppe comme
$$(f + g)^2 = (f + g) \circ (f + g) = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2.$$

Proposition 4.9. — *Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$ (c-à-d. f et g commutent). On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

(a) *$(f \circ g)^n = f^n \circ g^n$;*

(b) *$f^n - g^n = (f - g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k-1}$;*

(c) $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$ *(formule du binôme de Newton)*

où $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Démonstration. — Les propriétés (a) et (b) se démontrent directement en utilisant les opérations dans l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ sachant que f et g commutent.

La propriété (c) se démontrent par récurrence sur n : La formule est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle est démontrée jusqu'à l'ordre $n-1$.

$$\begin{aligned}
(f+g)^n &= (f+g)^{n-1} \circ (f+g) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^k \circ g^{n-1-k}\right) \circ (f+g) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (f^{k+1} \circ g^{n-1-k} + f^k g^{n-k}) \quad \text{car } f \circ g = g \circ f
\end{aligned}$$

en tenant compte de la formule de Pascal $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ on obtient

$$\begin{aligned}
(f+g)^n &= \binom{n-1}{0} f^0 \circ g^n + \binom{n-1}{n-1} f^n \circ g^0 \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right) f^k \circ g^{n-k} \\
&= \binom{n-1}{0} f^0 \circ g^n + \binom{n-1}{n-1} f^n \circ g^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.
\end{aligned}$$

Donc la formule est vraie au rang n. □

Exemple 4.10. — Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Comme Id_E commute à f on a

$$(f + \mathrm{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k$$

et

$$f^n - \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k = \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ (f - \mathrm{Id}_E)$$

Remarque 4.11. — Dans l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ si deux applications f et g sont telles que $f \circ g$ est l'application nulle, on ne peut pas affirmer que l'un des facteurs f ou g est nul. Par exemple si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x, y) = (0, x)$. Alors f est non nulle, mais $f \circ f \equiv 0$

Proposition 4.12. — *Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On a*

$$f \circ g = 0 \iff \mathbf{Im}(g) \subset \mathbf{Ker}(f).$$

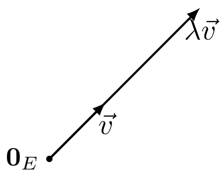
Démonstration. — Supposons $f \circ g = 0$. Si $w \in \mathbf{Im}(g)$, alors $\exists v \in E$ tel que $w = g(v)$ donc $f(w) = f(g(v)) = f \circ g(v) = \mathbf{0}_E$. On déduit que $w \in \mathbf{Ker}(f)$. Réciproquement, supposons $\mathbf{Im}(g) \subset \mathbf{Ker}(f)$. Si $v \in E$, alors $g(v) \in \mathbf{Im}(g) \subset \mathbf{Ker}(f)$, donc $f(g(v)) = \mathbf{0}_E$ ou encore $f \circ g(v) = \mathbf{0}_E$. On déduit que l'application $f \circ g$ est nulle. □

PARTIE II
TRANSFORMATIONS VECTORIELLES

Dans la suite E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

5. Homothétie vectorielle

Définition 5.1. — *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle* **homothétie vectorielle** *de rapport λ l'application $h_\lambda : E \to E$ définie par $h_\lambda(v) = \lambda v$, pour tout $v \in E$.*



Si $\lambda = 1$ alors $h_\lambda = \mathrm{Id}_E$ et si $\lambda = 0$, alors $h_\lambda = 0$, l'application nulle.

Proposition 5.2. — *Une homothétie vectorielle est un endomorphisme de E qui commute avec tout endomorphisme de E.*

Démonstration. — Si h_λ est une homothétie vectorielle de rapport λ, alors $h_\lambda = \lambda \mathrm{Id}_E$ et elle commute donc à tout endomorphisme de E. La réciproque est admise à ca stade. □

Proposition 5.3. — *On a*

(a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$.

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, h_λ *est bijective et* $h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}$.

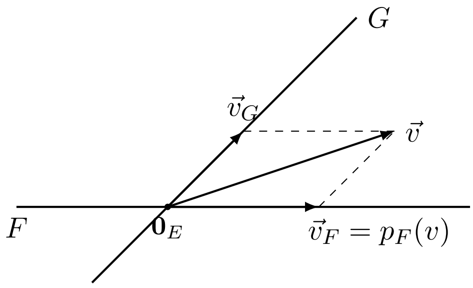
Démonstration. — (a) Soit $v \in E$, alors $h_\lambda \circ h_\mu(v) = h_\lambda(h_\mu(v)) = h_\lambda(\mu v) = \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v = h_{\lambda\mu}(v)$.

(b) Si $\lambda \neq 0$, alors d'après (a) $h_\lambda \circ h_{1/\lambda} = h_{\lambda\times 1/\lambda} = h_1 = \mathrm{Id}_E$. □

6. Projection vectorielle

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, $E = F \oplus G$. Pour tout $v \in E$, il existe un unique couple $(v_F, v_G) \in F \times G$ tel que $v = v_F + v_G$.
Considérons l'application

$$p_F : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ v & \mapsto & v_F \end{array}$$



Définition 6.1. — *L'application p_F est appelée* **projection vectorielle** *de E sur F parallèlement à G.*

Proposition 6.2. — *L'application p_F est un endomorphisme de E et vérifie $p_F^2 = p_F$. De plus*

$$\mathbf{Ker}(p_F) = G \quad et \quad \mathbf{Im}(p_F) = \mathbf{Ker}(p_F - \mathrm{Id}_E) = F.$$

Démonstration. — Montrons d'abord que p_F est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $v, w \in E$. Ces deux vecteurs se décomposent d'une manière unique dans la somme directe $E = F \oplus G$, $v = v_F + v_G$ et $w = w_F + w_G$. Comme $v + w = (v_F + w_F) + (v_G + w_G)$ et par unicité de la décomposition, on a $(v+w)_F = v_F + w_F$ (et $(v+w)_G = v_G + w_G$). On en déduit que $p_F(v+w) = p_F(v) + p_F(w)$. On montre de même que $p_F(\lambda v) = \lambda p_F(v)$. D'où la linéarité de p_F.

On remarque que si $u \in F$ alors $p_F(u) = u$. On déduit que pour tout $v \in E$, $p_F^2(v) = p_F(p_F(v)) = p_F(v)$ car $p_F(v) \in F$. D'où $p_F^2 = p_F$.

Soit $v = v_F + v_G \in E$. On a

$$v \in \mathbf{Ker}(p_F) \iff p_F(v) = \mathbf{0}_E \iff v_F = \mathbf{0}_F \iff v = v_G \in G.$$

Donc $\mathbf{Ker}(p_F) = G$.

Soit $v = v_F + v_G \in E$. On a

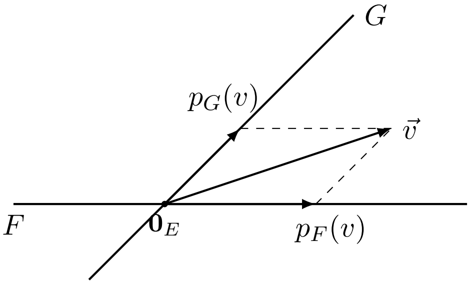
$$v \in \mathbf{Ker}(p_F - \mathrm{Id}_E) \iff p_F(v) = v \iff v \in F.$$

□

Remarques 6.3. — (a) L'image $\mathbf{Im}\, p_F$ est le sous-espace vectoriel de E formé des vecteurs invariants,

$$v \in \mathbf{Im}\, p_F \iff p_F(v) = v.$$

(b) On peut définir de même la projection de E sur G parallèlement à F par $p_G(v) = v_G$. Le projection p_G vérifient des propriétés similaires à celles pour p_F.



Proposition 6.4. — *On a*
(a) $p_F = \mathrm{Id}_E - p_G$;
(b) $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = 0$.

Démonstration. — (a) Soit $v = v_F + v_G \in E$, alors $v = p_F(v) + p_G(v)$, d'où $\mathrm{Id}_E = p_F + p_G$.
(b) Soit $v \in E$. Comme $p_G(v) \in G$, on a $p_F(p_G(v)) = \mathbf{0}_E$. Donc $p_F \circ p_G = 0$. On montre de même que $p_G \circ p_F = 0$. □

7. Projecteur

Définition 7.1. — *On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E vérifiant $p^2 = p$.*

Exemple 7.2. — Les projections vectorielles sont des projecteurs.

Théorème 7.3. — *Soit p un projecteur de E.*
(a) $\mathbf{Im}\, p$ *et* $\mathbf{Ker}\, p$ *sont supplémentaires dans E,*

$$E = \mathbf{Ker}\, p \oplus \mathbf{Im}\, p$$

(b) *p est la projection vectorielle sur $F = \mathbf{Im}\, p$, parallèlement à $G = \mathbf{Ker}\, p$.*

Démonstration. — (a) Soit $v \in \mathbf{Ker}\, p \cap \mathbf{Im}\, p$. Comme $v \in \mathbf{Ker}\, p$, $p(v) = \mathbf{0}_E$ et comme $v \in \mathbf{Im}\, p$, $p(v) = v$. D'où $v = \mathbf{0}_E$ et $\mathbf{Ker}\, p \cap \mathbf{Im}\, p = \{\mathbf{0}_E\}$.

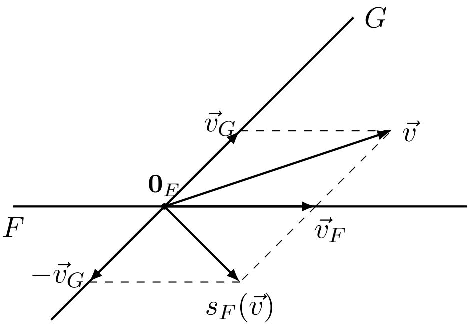
Soit $v \in E$. On a $v = (v - p(v)) + p(v)$. Or $p(v) \in \mathbf{Im}\, p$ et $v - p(v) \in \mathbf{Ker}\, p$, car $p(v - p(v)) = p(v) - p^2(v) = \mathbf{0}_E$, donc $E \subset \mathbf{Ker}\, p + \mathbf{Im}\, p$, d'où $E = \mathbf{Ker}\, p + \mathbf{Im}\, p$ et par suite $E = \mathbf{Ker}\, p \oplus \mathbf{Im}\, p$.

(b) Comme $E = \mathbf{Ker}\, p \oplus \mathbf{Im}\, p$, l'application p est la projection vectorielle sur $\mathbf{Im}\, p$ parallèlement à $\mathbf{Ker}\, p$. □

8. Symétrie vectorielle

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, $E = F \oplus G$. Pour tout $v \in E$, il existe un unique couple $(v_F, v_G) \in F \times G$ tel que $v = v_F + v_G$.
Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} s_F : & E & \to & E \\ & v & \mapsto & v_F - v_G \end{array}$$



Définition 8.1. — *L'application s_F est appelée* **symétrie vectorielle** *par rapport F et parallèlement à G.*

Si $F = E$ et $G = \{\mathbf{0}_E\}$, alors $s_F = \mathrm{Id}_E$ et si $F = \{\mathbf{0}_E\}$ et $G = E$, alors $s_F = -\mathrm{Id}_E$.

Proposition 8.2. — *L'application s_F est un endomorphisme de E qui vérifie $s_F^2 = \mathrm{Id}_E$. De plus*

$$F = \mathbf{Ker}(s_F - \mathrm{Id}_E) \quad et \quad G = \mathbf{Ker}(s_F + \mathrm{Id}_E).$$

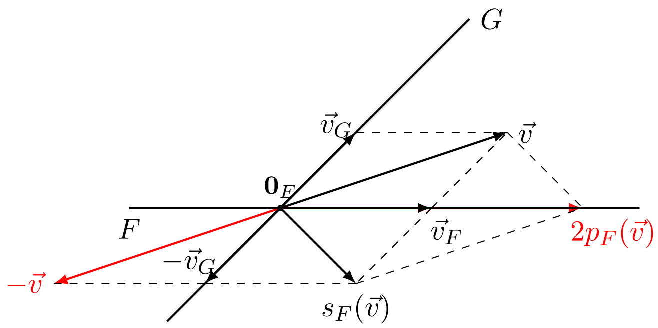
Démonstration. — Laissée comme exercice. □

Proposition 8.3. — *On a*

(a) $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$;

(b) s_F *est un automorphisme de E et $s_F^{-1} = s_F$.*

Démonstration. — Laissée comme exercice. □



Remarque 8.4. — On peut définir de la même manière la symétrie vectorielle s_G par rapport à G et parallèlement à F par $s_G(v) = v_G - v_F$. Donc $s_G = -s_F$.

Théorème 8.5. — *Si s est un endomorphisme de E vérifiant $s^2 = \mathrm{Id}_E$, alors*
(a) $\mathbf{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ *et* $\mathbf{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$ *sont supplémentaires dans E, $E = \mathbf{Ker}(s-\mathrm{Id}_E) \oplus \mathbf{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$;*
(b) *s est la symétrie vectorielle par rapport à $F = \mathbf{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $G = \mathbf{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$.*

Démonstration. — Laissée comme exercice. □

PARTIE III
APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

Dans cette partie, E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

9. Image d'une famille de vecteurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle image de la famille $\mathcal{B}$ par l'application linéaire f, la famille

$$f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \cdots, f(e_n)).$$

Proposition 9.1. — *On a*

$$f\left(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)\right) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n)).$$

Démonstration. — Soit $v \in E$. Si $v \in f\,(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n))$ alors $\exists w \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$ tel que $v = f(w)$. Comme $w = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, on a $v = f(w) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$.
Réciproquement, si $v \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$, alors $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) = f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k) \in f\,(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n))$. □

Corollaire 9.2. — *Si V est un sous-espace vectoriel de E, alors*

$$\dim f(V) \leq \dim V$$

Démonstration. — Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de V, alors

$$f(V) = f\,(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

Donc $\dim f(V) \leq n = \dim V$. □

Proposition 9.3. — *Si la famille $\mathcal{B}$ est libre dans E et si l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, alors $f(\mathcal{B})$ est libre dans F.*

Démonstration. — Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = \mathbf{0}_F$. Par linéarité, $f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \mathbf{0}_F$, donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in \mathbf{Ker}\, f$. Comme f est injective, $\mathbf{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_F\}$, d'où $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \mathbf{0}_E$. Or la famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est libre dans E, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et par suite la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est libre. □

Corollaire 9.4. — *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, alors* $\dim E \leq \dim F$.

Démonstration. — Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, alors d'après la proposition précédente, la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est libre dans F, d'où $\dim F \geq n = \dim E$. □

Remarque 9.5. — Si V est un sous-espace vectoriel de E et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, alors $\dim f(V) = \dim V$.

Proposition 9.6. — *Si la famille $\mathcal{B}$ est génératrice dans E et si l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective, alors $f(\mathcal{B})$ est génératrice dans F.*

Démonstration. — Soit $w \in F$. Comme f est surjective, $\exists v \in E$ tel que $w = f(v)$. Or $\mathcal{B}$ est génératrice dans E, donc $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. D'où par linéarité $w = f(v) = f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k)$. On en déduit que la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est génératrice dans F.

□

Corollaire 9.7. — *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective, alors* $\dim F \leq \dim E$.

Démonstration. — Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, c'est en particulier une famille génératrice. Comme f est surjective, la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est génératrice dans F. On déduit que $\dim F \leq n = \dim E$. □

La proposition suivante est donc immédiate.

Proposition 9.8. — *Si la famille $\mathcal{B}$ est une base de E et si l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $f(\mathcal{B})$ est base de F.*

Corollaire 9.9. — *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors* $\dim E = \dim F$.

10. Image d'une base par une application linéaire

Théorème 10.1. — *Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$\forall 1 \leq j \leq n, \;\; f(e_j) = v_j.$$

Démonstration. — Unicité : Soit f solution. Pour tout $v \in E$, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ uniques tels que $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$. On a alors

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$$

ce qui détermine $f(v)$ de manière unique.

Existence : Pour tout $v \in E$, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ uniques tels que $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$. Posons

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$$

Alors f est linéaire et vérifie $f(e_j) = v_j$. □

Corollaire 10.2. — *Un application linéaire est entièrement déterminer par l'image d'une base.*

Exemple 10.3. — La famille formée des vecteurs

$$(1, 1, 1), \; (0, 1, 1), \; (0, 0, 1)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminons l'unique $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ vérifiant

$$f(1, 1, 1) = (1, 0), \; f(0, 1, 1) = (0, 1), \; f(0, 0, 1) = (1, 1).$$

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ déterminons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y, z) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

Après résolution du système linéaire, on trouve $\alpha = x$, $\beta = y-x$ et $\gamma = z-y-x$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xf(1,1,1) + (y-x)f(1,1,0) + (z-y-x)f(0,0,1) \\ &= x(1,0) + (y-x)(0,1) + (z-y-x)(1,1) \\ &= (z-y, z-2x). \end{aligned}$$

Théorème 10.4. — *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E.*

(a) *f est injective si, et seulement si, la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est libre dans F;*

(b) *f est surjective si, et seulement si, la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est génératrice dans F;*

(c) *f est un isomorphisme si, et seulement si, la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une base de F.*

Démonstration. — (a) $\Rightarrow$: déjà vue.

$\Leftarrow$: Supposons que $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est libre dans F. Soit $v \in \mathbf{Ker}\, f$. On décompose x dans la base $\mathcal{B}$, $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. On a

$$\mathbf{0}_F = f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$$

Or la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est libre donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et $v = \mathbf{0}_E$. On en déduit que f est injective.

(b) $\Rightarrow$: déjà vue.

$\Leftarrow$: Supposons que $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est génératrice dans F. Soit $w \in F$, alors il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $w = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$. Posons $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Par linéarité de f, on a $f(v) = w$. Donc f est surjective.

(c) Découle de (a) et (b). □

Corollaire 10.5. — *Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si, ils ont même dimension.*

Démonstration. — Si les deux espaces sont isomorphes, un isomorphisme transforme une base de l'un en une base de l'autre et donc les deux espaces ont même dimension.

Inversement, s'il y a égalité des dimensions il existe une application linéaire qui transforme une base de l'un en une base de l'autre et celle-ci est un isomorphisme. □

11. Rang d'une application linéaire

Définition 11.1. — *On appelle* **rang** *d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ la dimension de* $\mathbf{Im}\, f$. *On note*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathbf{Im}\, f.$$

Proposition 11.2. — *Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors*

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \cdots, f(e_n)).$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) = \dim \mathbf{Im}\, f &= \dim f(E) \\ &= \dim f\left(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)\right) \\ &= \dim \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) \\ &= \mathrm{rg}(f(e_1), \cdots, f(e_n)). \end{aligned}$$

□

Proposition 11.3. — *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a*
(a) $\mathrm{rg}(f) \leq \dim E$ *avec égalité si, et seulement si, f est injective;*
(b) $\mathrm{rg}(f) \leq \dim F$ *avec égalité si, et seulement si, f est surjective.*

Démonstration. — Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E avec $n = \dim E$. On a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) \leq n$ avec égalité si, et seulement si, $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est libre, donc f est injective.

On a aussi $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) \leq \dim F$ avec égalité si, et seulement si $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est génératrice, donc f est surjective.

□

Proposition 11.4. — *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ deux applications linéaires de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors*

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$$

De plus, si f est surjective alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$ et si g est injective alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Démonstration. — Laissée comme exercice. □

Corollaire 11.5. — *On ne modifie pas le rang d'une application linéaire en composant celle-ci avec un isomorphisme.*

12. Théorème du rang, théorème d'isomorphisme

***Théorème 12.1* (Théorème du rang).** — *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\dim E < \infty$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors*

$$\dim \mathbf{Ker}\, f + \mathrm{rg}(f) = \dim E.$$

Démonstration. — Comme $\mathbf{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E et que E est de dimension finie, alors $\mathbf{Ker}\, f$ admet un sous-espace supplémentaire H

(qui est de dimension finie aussi), $E = \mathbf{Ker}\, f \oplus H$. Considérons la restriction $f_{|_H}$ de f à H,

$$f_{|_H} : H \to \mathbf{Im}\, f,\ \forall v \in H,\ f_{|_H}(v) = f(v).$$

Il est claire que $f_{|_H} \in \mathcal{L}(H, \mathbf{Im}\, f)$. Or $\mathbf{Ker}\, f_{|_H} = \mathbf{Ker}\, f \cap H = \{\mathbf{0}_E\}$. Donc $f_{|_H}$ est injective.

Soit $w \in \mathbf{Im}\, f$, alors il existe $v \in E$ tel que $w = f(v)$. On peut écrire $v = a + b$ avec $a \in \mathbf{Ker}\, f$ et $b \in H$. D'où $w = f(v) = f(a) + f(b) = f(b) = f_{|_H}(b) \in \mathbf{Im}\, f_{|_H}$. Donc $f_{|_H}$ est surjective. On déduit que $f_{|_H}$ est un isomorphisme de H sur $\mathbf{Im}\, f$. Par conséquent

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathbf{Im}\, f = \dim H = \dim E - \dim \mathbf{Ker}\, f$$

□

Exemple 12.2. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, y - x, 2x + y + z).$$

Il est facile de vérifier que f est linéaire. Déterminons une base de $\mathbf{Ker}\, f$ et une base de $\mathbf{Im}\, f$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathbf{Ker}\, f &\iff f(x,y,z) = (0,0,0)\\ &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

D'autre part, soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}(a,b,c) \in \mathbf{Im}\, f &\iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (a,b,c)\\ &\iff \begin{cases} x + 2y + z = a \\ -x + y = b \\ 2x + y + z = c \end{cases}\end{aligned}$$

Nous allons donc déterminer en même temps $\mathbf{Ker}\, f$ et $\mathbf{Im}\, f$ en réduisant le tableau

$$\begin{array}{rrr|r|l} 1 & 2 & 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 2 & 1 & 1 & 0 & c \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrr|r|r} 1 & 2 & \boxed{1} & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & -1 & 0 & 0 & c - a \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrr|r|r} 0 & 3 & \boxed{1} & 0 & 2a - c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c + b - a \\ \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & c - a \end{array}$$

La 2ème ligne donne donc l'équation qui caractérise $\mathbf{Im}\, f$,

$$(a,b,c) \in \mathbf{Im}\, f \iff c + b - a = 0 \iff (a,b,c) = c(1,0,1) + b(1,1,0)$$

Donc $\mathbf{Im}\, f = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0))$ et les deux vecteurs forment une base de $\mathbf{Im}\, f$. On en déduit (avant le calcul) que $\dim \mathbf{Ker}\, f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathbf{Im}\, f = 3 - 2 = 1$. Toujours d'après la réduction de Gauss on voit que

$$(x,y,z) \in \mathbf{Ker}\, f \iff z = -3x, x = y \iff (x,y,z) = y(1,1,-3)$$

et $\mathbf{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(1, 1, -3)$ qui un sous-espace de dimension 1.

Une autre façon d'utiliser la formule du rang est de déterminer d'abord le noyau de f, $\mathbf{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(1, 1, -3)$ et déduire d'après la formule du rang que $\dim \mathbf{Im}\, f = 2$. Il suffit alors de trouver deux vecteurs non colinéaires de $\mathbf{Im}\, f$ pour en trouver une base. On peut par exemple prendre $f(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$ et $f(0, 1, 0) = (2, 1, 1)$.

Exemple 12.3. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dime sion finie, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ g = 0$. Montrons que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq \dim E$.

Comme $f \circ g = 0$ on a $\mathbf{Im}\, g \subset \mathbf{Ker}\, f$ puis $\mathrm{rg}(g) \leq \dim \mathbf{Ker}\, f$. Or par la formule du rang $\dim \mathbf{Ker}\, f = \dim E - \mathrm{rg}(f)$ donc $\mathrm{rg}(g) \leq \dim E - \mathrm{rg}(f)$.

Exemple 12.4. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathbf{Ker}\, f = \mathbf{Ker}\, f^2$. Montrons que $\mathbf{Im}\, f$ et $\mathbf{Ker}\, f$ sont supplémentaires.

Par la formule du rang $\dim \mathbf{Ker}\, f + \dim \mathbf{Im}\, f = \dim E$. Il suffit donc de montrer que $\mathbf{Ker}\, f \cap \mathbf{Im}\, f = \{\mathbf{0}\}$. Soit $v \in \mathbf{Ker}\, f \cap \mathbf{Im}\, f$ alors $f(v) = \mathbf{0}$ et il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$. D'où $\mathbf{0} = f(v) = f^2(u)$ et donc $u \in \mathbf{Ker}\, f^2$. Comme $\mathbf{Ker}\, f^2 = \mathbf{Ker}\, f$, on déduit que $u \in \mathbf{Ker}\, f$ et par suite $v = f(u) = 0$. Ainsi $\mathbf{Ker}\, f \cap \mathbf{Im}\, f = \{\mathbf{0}\}$ et on peut donc conclure que $\mathbf{Ker}\, f \oplus \mathbf{Im}\, f = E$.

***Théorème 12.5* (Théorème d'isomorphisme).** — *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies tels que* $\dim E = \dim F = n$. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a equivalence entre*

(1) f est un isomorphisme;
(2) f injective;
(3) f surjective;
(4) $\mathrm{rg}(f) = n$;
(5) $\exists g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$;
(6) $\exists h \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$;
de plus, si tel est le cas, alors

$$g = h = f^{-1}.$$

Démonstration. — (1) $\Rightarrow$ (2) Evident.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supposons f injective. Par la formule du rang $\mathrm{rg}(f) = \dim E - \dim \mathbf{Ker}\, f = \dim E = \dim F$ donc $\mathbf{Im}\, f = F$ et f est surjective.

(3) $\Rightarrow$ (4) Supposons f surjective. On a $\mathrm{rg}(f) = \dim F = n$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Supposons $\mathrm{rg}(f) = n$. On a $\mathrm{rg}(f) = n = \dim E$ donc $\dim \mathbf{Ker}\, f = 0$ et f est injective. On a aussi $\mathrm{rg}(f) = n = \dim F$ donc f est surjective. Ainsi f est un isomorphisme.

Enfin il est claire que (1) est équivalent à (5) et à (6). $\square$

Exemple 12.6. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y).$$

Il est claire que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Montrons que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Puisque les deux espaces de départ et d'arrivée sont de dimensions finies et de même dimension, il suffit de montrer que f est injective.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathbf{Ker}\, f \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x,y,z) = (0,0,0) \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \phantom{x+{}} y + z = 0 \\ x \phantom{{}+y} + z = 0 \\ x + y \phantom{{}+z} = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = y = z = 0
\end{aligned}
$$

Donc $\mathbf{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$, puis f est injective et par conséquent c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

---

version 1, April 8, 2024