Examen de 2e session, 1er Juillet 2022 – durée 3h

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. (**sur 9 pt**) Soit F l'ensemble défini par

$$F = \left\{ v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{array} \right\} \right\}.$$

et soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$G = \mathrm{Vect}(u,v)$$

où

$$u = (1,1,1),\ v = (0,2,1).$$

(1) 1,5 pt Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(2) 1,5+0,5 pt Trouver une base de F et calculer $\dim F$.
(3) 1,5 pt Définir G par une ou plusieurs équations.
(4) 1 pt Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, où $w = (1,0,1)$.
(5) 1 pt A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^3$?
(6) 2 pt Soit $\mathbf{a} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimer $\mathbf{a}$ dans la base (u,v,w).

Solution de l'exercice 1. (1) Il est facile de montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(2) Soit $\mathbf{a} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\mathbf{a} = (x,y,z) \in F \iff x = z, \text{ et } y = 0 \iff \mathbf{a} = z(1,0,1)$$

On en déduit que le vecteur $(1,0,1)$ forme à lui seul une base de F et que $\dim F = 1$.
(3) Soit $\mathbf{a} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = (x,y,z) \in G &\iff \exists \alpha,\beta \in R \mid (x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(0,2,1) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha & & & = & x \\ \alpha & + & 2\beta & = & y \\ \alpha & + & \beta & = & z \end{array} \right. \\ &\iff x+y-2z = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z = 0\}.$$

(4) On montre sans problème que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
(5) Comme (w) est une base de F, que (u,v) est une base de G et que la concaténation (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, on déduit que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
(6) Soit $\mathbf{a} = (x,y,z)$. On cherche $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y,z) = \alpha u + \beta v + \gamma w$. On doit alors résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta \qquad = x \\ \qquad \beta + 2\gamma = y \\ \alpha + \beta + \ \gamma = z \end{cases}$$

On trouve

$$\alpha = -x-y+2z,\ \beta = 2x+y-2z,\ \gamma = -x+z.$$

Exercice 2. (**sur 8 pt +1 pt si la question 5 est faite**) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1+\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1-\frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 1,5 pt Soient $t,s \in \mathbb{R}$. Montrer que $A(s)A(t) = A(t+s)$.
(2) 1,5 +0,5 pt En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est inversible et calculer $A(t)^{-1}$.
(3) 1,5 pt Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $(A(t)-I_3)^3$ est la matrice nulle.
(4) 1+2 pt Developer $(A(t)-I_3)^3$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
En déduire $A(t)^3$ comme combinaison linéaire de $A(t)^2$, $A(t)$ et I_3.
(5) (**Question facultative**) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)^n = \alpha_n A(t)^2 + \beta_n A(t) + \gamma_n I_3$.

Solution de l'exercice 2. (1) On a

$$\begin{aligned} A(s)A(t) &= \begin{pmatrix} \frac{s^2+t^2+2st+2}{2} & \frac{-s^2-t^2-2st}{2} & s+t \\ \frac{s^2+t^2+2st}{2} & \frac{-s^2-t^2-2st+2}{2} & s+t \\ s+t & -s-t & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+\frac{(s+t)^2}{2} & -\frac{(s+t)^2}{2} & s+t \\ \frac{(s+t)^2}{2} & 1-\frac{(s+t)^2}{2} & s+t \\ s+t & -s-t & 1 \end{pmatrix} = A(s+t) \end{aligned}$$

(2) On remarque que $A(0) = I_3$. Donc d'après (1) $A(t)A(-t) = A(0) = I_3$. Il s'ensuit que $A(t)$ est inversible et que $A(t)^{-1} = A(-t)$.

(3) On a

$$A(t) - I_3 = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$(A(t) - I_3)^2 = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 & 0 \\ t^2 & -t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(A(t) - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) D'autre part, d'après la formule du binôme, on a

$$(A(t) - I_3)^3 = A(t)^3 - 3A(t)^2 + 3A(t) - I_3$$

donc d'après (3)

$$A(t)^3 - 3A(t)^2 + 3A(t) - I_3 = 0$$

et

$$A(t)^3 = 3A(t)^2 - 3A(t) + I_3.$$

(5) Montrons par recurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)^n = \alpha_n A(t)^2 + \beta_n A(t) + \gamma_n I_3$.

La relation est vraie pour

$n = 0$ (prendre $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ et $\gamma_0 = 1$) ;
$n = 1$ (prendre $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ et $\beta_1 = 1$) ;
$n = 2$ (prendre $\gamma_2 = \beta_2 = 0$ et $\alpha_2 = 1$) ;
$n = 3$ d'après la question (4)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie pour n : $\exists \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)^n = \alpha_n A(t)^2 + \beta_n A(t) + \gamma_n I_3$. Montrons que cette propriété est encore vraie pour $n + 1$. On a

$$\begin{aligned} A(t)^{n+1} &= A(t) \times A(t)^n \\ &= A(t) \times (\alpha_n A(t)^2 + \beta_n A(t) + \gamma_n I_3) \\ &= \alpha_n A(t)^3 + \beta_n A(t)^2 + \gamma_n A(t) \\ &= \alpha_n (3A(t)^2) - 3A(t) + I_3) + \beta_n A(t)^2 + \gamma_n A(t) \\ &= (3\alpha_n + \beta_n) A(t)^2 + (-3\alpha_n + \gamma_n) A(t) + \alpha_n I_3 \end{aligned}$$

Donc $A(t)^{n+1} = \alpha_{n+1} A(t)^2 + \beta_{n+1} A(t) + \gamma_{n+1} I_3$ avec

$$\alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n,\ \beta_{n+1} = -3\alpha_n + \gamma_n,\ \gamma_{n+1} = \alpha_n.$$

Exercice 3. **(sur 15 pt)** Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_0$ est

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ -18 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 1,5 pt Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, on la note $\mathcal{B}_1$.
(2) 1,5 pt Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$, on la note $\mathcal{B}_2$.
(3) 1,5 pt Montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(4) 1,5 pt Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.
(5) 1,5 pt Ecrire la matrice $D := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$.
(6) 1,5 pt Quelle est la relation qui lie A et D ?
(7) 1,5 pt Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$.
(8) 1,5 pt Soit le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$. Déterminer les racines de P.
(9) 1,5 pt Soit $n \in \mathbb{N}$. On admet qu'il existe deux polynômes Q et R tels que

$$X^n = Q(X)P(X) + R(X)$$

avec $R(X) = \alpha X + \beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Utiliser les racines du polynôme P pour trouver α et β.

(10) 1,5 pt En déduire a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$, on utilisera que $P(A) = A^2 - 3A + 2I_3$ et que $R(A) = aA + bI_3$.

Solution de l'exercice 3. (1) On trouve $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(u)$ où $u = (1, -2, 0)$, donc $\mathcal{B}_1 = (u)$.

(2) On trouve $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(v, w)$ où $v = (1, 0, -9)$ et $w = (0, 1, -5)$ (par exemple ; cela dépend de la façon dont vous avez chsoi les pivots) donc $\mathcal{B}_2 = (v, w)$.

(3) On montre sans problème que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4) De la question (3) on déduit que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.

(5) On a :

$u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, donc $f(u) = u$;
$v, w \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$, donc $f(v) = 2v$ et $f(w) = 2w$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc

$$D := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(6) On a $A = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

(7) En effectuons l'opération $D^2 - 3D + 2I_3$, on trouve $D^2 - 3D + 2I_3 = 0$. Or $A = PDP^{-1}$, donc

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 2I_3 &= (PDP^{-1})^2 - 3(PDP^{-1}) + 2(PP^{-1}) \\ &= PD^2P^{-1} - 3P^{-1}DP^{-1} + 2PP^{-1} \\ &= P(D^2 - 3D + 2I_3)P^{-1} = 0. \end{aligned}$$

(8) On a $P(X) = (X-1)(X-2)^2$, donc les racines de P sont 1 et 2.

(9) Par division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme$P(X) = X^2 - 3X + 2$, il existe un reste R et un quotient Q tels que

$$X^n = (X^2 - 2X + 2)Q(X) + R(X) \qquad (E)$$

avec $\deg R(X) < \deg(X^2 - 2X + 2 = 2)$, c-à-d $\deg R(X) \leq 1$. Donc le polynôme R est de la forme $R(x) = aX + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminons maintenant a et b, pour cela il suffit d'utiliser les racines 1 et 2 t de P, c-à-d. $P(1) = P(2) = 0$.
On a

$1^n = P(1)Q(1) + R(1) = 0 \times Q(1) + a \times 1 + b = a + b$;

$2^n = P(2)Q(2) + R(2) = 0 \times Q(2) + a \times 2 + b = 2a + b$;

d'où

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases}$$

et par suite

$$a = 2^n - 1, \; b = -2^n + 2.$$

(10) D'après l'identité (E) et la question (7) on a

$$\begin{aligned} A^n &= (A^2 - 3A + 2I_3) \times Q(A) + R(A) \\ &= 0 \times Q(A) + ax + bI_3 \\ &= (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3 \end{aligned}$$