Algèbre bilinéaire

Examen 2e session – 24 Juin 2015

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 3h

Exercice 1. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par les équations

$$x + y + z + t = 0, \quad x + y + 2z - t = 0$$

dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

(a) Donner une base orthonormée de F.

(b) Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}_0$ de la projection orthogonale p sur F.

(c) En déduire la matrice dans la base $\mathcal{B}_0$ de la symétrie orthogonale s par rapport à F.

(c) Calculer la distance d'un vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ à F.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle x; y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. On considère deux vecteurs unitaires a et b tels que $\langle a; b\rangle = 0$ et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$f(x) = x + \langle a; x\rangle b + \langle b; x\rangle a, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Montrer que f est auto-adjoint, $f^* = f$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

(b) Ecrire la matrice de f dans une base orthonormée contenant a et b.
Quel-est alors le rang de f?

(c) Montrer que le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\{a, b\}$ est stable par f.

(d) En déduire les valeurs propres de $f_{|F}$ (restriction de f à F). (Ind. Calculer $f(a)$ et $f(b)$).

(e) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
Diagonaliser f dans une base orthonormée.

Exercice 3. (a) Justifier que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

(b) Trouver une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.