Algèbre bilinéaire

Examen du 02/06/2016

Epreuve de 3 heures

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel euclidien, a un vecteur non nul de E, α un réel non nul et u l'endomorphisme défini par

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \alpha \langle x|a \rangle a.$$

(a) Montrer que si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $\alpha = -\frac{2}{\|a\|^2}$.

(b) Réciproquement, on suppose $\alpha = -\frac{2}{\|a\|^2}$. Reconnaître alors l'endomorphisme u. En déduire que $u \in \mathcal{O}(E)$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme E.

(a) Montrer que l'endomorphisme $v = u^* \circ u$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

(b) Etablir $\mathbf{Ker}\, v = \mathbf{Ker}\, u$ puis $\mathbf{Im} v = (\mathbf{Ker}\, u)^\perp$.

Exercice 3. On considère l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ munit de sa b.o.n. canonique directe $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. Soit la matrice

$$A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = A$.

(a) Vérifier que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

(b) Reconnaître l'endomorphisme u.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ munit de son produit scalaire canonique et de sa blase canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit F le sous-espace vectoriel des vecteurs $v = (x, y, z, t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$ vérifiant

$$x + y + z + t = 0; \quad x + 2y + 3z + 4t = 0.$$

(a) Donner une base de F.

(b) Déterminer les équations qui caractérisent $F^\perp$.

(c) Donner une base orthonormée de $F^\perp$.

(d) En déduire $d(v, F)$ où $v = (1, 1, 1, 1)$.

Exercice 5. Soi $A = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tC \\ C & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$.

On suppose que A est une matrice symétrique positive, $A \in \mathcal{S}_n^+$, autrement dit

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geq 0. \qquad (1)$$

(a) Calculer ${}^tA$, en déduire que B est symétrique. **T.S.V.P.**

(b) Montrer que $\alpha \geq 0$ (*Choisir un vecteur bien particulier dans* (1)).
(c) Montrer que $B \in \mathcal{S}_{n-1}^{+}$ (*Choisir un vecteur adapté pour* (1)).
(d) Montrer que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tMAM \in \mathcal{S}_n^{+}$.
(e) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,{}^tC \\ 0 & \\ \vdots & \sqrt{\alpha} I_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Vérifier que

$$ {}^tMAM = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \alpha B - C\,{}^tC & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

En déduire que $\alpha B - C\,{}^tC \in \mathcal{S}_{n-1}^{+}$.
(f) Montrer que si $\alpha = 0$, alors C est le vecteur nul.