Algèbre bilinéaire

# Examen du 29/05/2015

**Exercice 1.** On considère sur l'espace $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle A; B\rangle = \mathbf{tr}({}^tAB)$. Soit le sous-espace vectoriel

$$F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \; ; \; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Trouver une base orthonormée de $F^\perp$

(b) Déterminer la projection orthogonal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$

(c) En déduire $d(A, F)$, la distance de $A$ à $F$.

**Exercice 2.** On considère l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, munit de sa base canonique $\mathcal{B}_0$. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de l'endomorphisme $f$ dont la matrice $A$ relativement à la base $\mathcal{B}_0$ est donnée par

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 4 & 8 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3.** Soit $E$ un espace euclidien et $f$ un endomorphisme de $E$.
(a) Montrer que $\mathbf{Ker}(f^*) = \mathbf{Im}(f)^\perp$ et $\mathbf{Im}(f^*) = \mathbf{Ker}(f)^\perp$.
(b) On suppose $f^2 = 0$. Montrer que
(i) $\mathbf{Ker}(f + f^*) = \mathbf{Ker}(f) \cap \mathbf{Ker}(f^*)$.
(ii) $f + f^*$ inversible $\iff$ $\mathbf{Ker}(f) = \mathbf{Im}(f)$.

**Exercice 4.** Soient $E$ un espace euclidien, $p$ un projecteur de $E$ tel que $p^* = p$.
(a) Montrer que $p$ est un projecteur orthogonal.
(b) Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases orthonormées de $E$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \|p(e_k)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|p(e'_k)\|^2$$

(c) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \|p(e_k)\|^2 = \mathrm{rang}(p).$$

(Pensez à une b.o.n. adaptée à $E = \mathbf{Ker}(p) \oplus^\perp \mathbf{Im}(p)$)