CHAPITRE 4
ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Table des matières

Dans tout ce chapitre E est un espace euclidien de dimension n et de produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

1. Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 1.1. — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme de E noté u^* tel que*

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle.$$

u^* est appelé l'endomorphisme **adjoint** *de u.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ une b.o.n. de E, alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$ et tout $y = \sum_{i=1}^n y_ie_i$ éléments de E on a

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i = X^TY$$

où $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y)$. On note $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, alors

$$\langle u(x)|y\rangle = (AX)^TY = X^TA^TY.$$

Soit $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = A^T$, alors

$$\langle u(x)|y\rangle = X^T A^T Y = X^T(A^T Y) = \langle x|u^*(y)\rangle.$$

Supposons qu'il existe un autre endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\langle u(x)|y\rangle = \langle x|v(y)\rangle$ pour tout $x, y \in E$. On a alors

$$\forall x, y \in E,\ \ \langle x|(u^* - v)(y)\rangle = \langle x|u^*(y) - v(y)\rangle = 0$$

donc, pour tout $y \in E$, $(u^* - v)(y) \in E^\perp = \{0_E\}$, ce qui entraîne $v = u^*$, d'où l'unicité.

□

Exemple 1.2. — On considère $E = M_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel $\langle A|B\rangle = \mathbf{tr}(A^T B)$ et on considère l'endomorphisme u_A défini pour tout $A \in E$ par

$$u_A(M) = MA.$$

On a pour tout $M, N \in E$,

$$\langle u_A(M)|N\rangle = \mathbf{tr}((MA)^T N) = \mathbf{tr}(A^T M^T N) = \mathbf{tr}(M^T N A^T) = \langle M|NA^T\rangle.$$

On en déduit que l'endomorphisme adjoint est donné par

$$u_A^*(N) = NA^T = u_{A^T}(N).$$

Proposition 1.3. — *(a) Soient $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, alors $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = A^T$.*

(b) $\mathrm{Id}_E^* = \mathrm{Id}_E$.

(c) L'application $u \mapsto u^*$ est un automorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$, c-à-d. $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $(u^*)^* = u$.

(d) $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$. En particulier, si u est inversible, alors u^* est inversible et $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

(e) $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathbf{Ker}\, u^* = (\mathbf{Im}\, u)^\perp$ et $\mathbf{Im}\, u^* = (\mathbf{Ker}\, u)^\perp$. En particulier $\mathrm{rang}(u^*) = \mathrm{rang}(u)$.

(f) $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, u et u^* ont le même polynôme caractéristique, donc même déterminant et même trace.

(g) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Démonstration. — (a) Découle de la démonstration du théorème précédent.

(b) $\forall x, y \in E$ on a

$$\langle x|y\rangle = \langle \mathrm{Id}_E(x)|y\rangle = \langle x|\mathrm{Id}_E^*(y)\rangle$$

donc pour tout $x \in E$, $\langle x|y - \mathrm{Id}_E^*(y)\rangle = 0$, d'où $\forall y \in E$, $y - \mathrm{Id}_E^*(y) \in E^\perp = \{0\}$ ce qui entraîne $\mathrm{Id}_E^* = \mathrm{Id}_E$.

(c) $\forall x, y \in E$ on a $\langle u^*(x)|y\rangle = \langle y|u^*(x)\rangle = \langle u(y)|x\rangle = \langle x|u(y)\rangle$ et $\langle u^*(x)|y\rangle = \langle x|(u^*)^*(y)\rangle$ donc $\langle x|u(y)\rangle = \langle x|(u^*)^*(y)\rangle$ et $u(y) = (u^*)^*(y)$ pour tout $y \in E$, d'où $(u^*)^* = u$.

(d) $\forall x, y \in E$ on a

$$\langle (u\circ v)(x)|y\rangle = \langle u(v(x))|y\rangle = \langle v(x)|u^*(y)\rangle = \langle x|v^*(u^*(y))\rangle = \langle x|(v^*\circ u^*)(y)\rangle$$

donc par unicité de l'adjoint, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
En particulier, si u est inversible, $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_E$, donc $(u^{-1})^* \circ u^* = \mathrm{Id}_E^* = \mathrm{Id}_E$., c-à-d. $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

(e) On a

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{Ker}\, u^* &\iff u^*(x) = 0 \\ &\iff \forall y \in E,\ \langle y|u^*(x)\rangle = 0 \\ &\iff \forall y \in E,\ \langle u(y)|x\rangle = 0 \\ &\iff x \in (\mathbf{Im}\, u)^\perp \end{aligned}$$

La seconde égalité se déduit de $(u^*)^* = u$ et $(F^\perp)^\perp = F$ car F est de dimension finie. D'où

$$\mathrm{rang}(u^*) = \dim \mathbf{Im}\, u^* = \dim(\mathbf{Ker}\, u)^\perp = n - \dim \mathbf{Ker}\, u = \dim \mathbf{Im}\, u = \mathrm{rang}(u).$$

(f) On a $\chi_{u^*} = \chi_u$, car $\chi_A = \chi_{A^T}$. Donc $\mathbf{det}(u^*) = \mathbf{det}(u)$ et $\mathbf{tr}(u^*) = \mathbf{tr}(u)$.

(g) Supposons $u(F) \subset F$ et soit $x \in F^\perp$, alors pour tout $y \in F$, $\langle u^*(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle = 0$ car $u(y) \in F$. On en déduit que $u^*(x) \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par u^*.

□

Definition 1.4. — *Soit u un endomorphisme de E.*

On dit que u est **symétrique** *ou* **autoadjoint** *si $u^* = u$;*

(b) On dit que u est un **automorphisme orthogonal** *si $u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$. On notera $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.*

Proposition 1.5. — *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E. On a équivalence entre :*

(a) p est un projecteur orthogonal, c-à-d. $\mathbf{Ker}\, p = (\mathbf{Im}\, p)^\perp$ *;*

(b) p est autoadjoint ;

(c) $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. — On peut d'abord remarquer que si p est un projecteur, c-à-d. $p^2 = p$, alors p^* l'est aussi.

(a) $\Rightarrow$ (b) : puisque p est orthogonal, on a $\mathbf{Ker}\, p = (\mathbf{Im}\, p)^\perp$, donc $\mathbf{Im}\, p = (\mathbf{Ker}\, p)^\perp$. Or d'après la proposition précédente $(\mathbf{Im}\, p)^\perp = \mathbf{Ker}\, p^*$ et $(\mathbf{Ker}\, p)^\perp = \mathbf{Im}\, p^*$. Donc $\mathbf{Ker}\, p = \mathbf{Ker}\, p^*$ et $\mathbf{Im}\, p = \mathbf{Im}\, p^*$. Puisque p est un projecteur, $E = \mathbf{Ker}\, p \oplus \mathbf{Im}\, p$. Soit $x = a + b \in E = \mathbf{Ker}\, p \oplus \mathbf{Im}\, p$. On a $p^*(x) = p^*(a) + p^*(b) = 0 + b = b = p(x)$. On en déduit que $p^* = p$.

(b) $\Rightarrow$ (c) : soit $x \in E$, on a

$$\|p(x)\|^2 = \langle p(x)|p(x)\rangle = \langle x|(p^* \circ p)(x)\rangle \langle x|(p \circ p)(x)\rangle = \langle x|p(x)\rangle$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle x|p(x)\rangle \leq \|x\|\|p(x)\|$, on déduit que $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|\|p(x)\|$.
Si $\|p(x)\| = 0$, alors l'inégalité demandée est triviale.
Si $\|p(x)\| \neq 0$, alors on clairement $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Il suffit de montrer que $(\mathbf{Ker}\, p)^\perp = \mathbf{Im}\, p$. Soit $x \in (\mathbf{Ker}\, p)^\perp \subset E = \mathbf{Ker}\, p \oplus \mathbf{Im}\, p$. Alors $x = a + b$ avec $a \in \mathbf{Ker}\, p$ et $b \in \mathbf{Im}\, p$. On a $\langle x|a\rangle = 0$, donc $\|b\|^2 = \|x - a\|^2 = \|x\|^2 + \|a\|^2 \geq \|x\|^2$. Or $b = p(x)$, donc $\|b\| = \|p(x)\| \leq \|x\|$. On en déduit que $\|x\| = \|b\|$ et $a = 0$, donc $x = b \in \mathbf{Im}\, p$ et $(\mathbf{Ker}\, p)^\perp \subset \mathbf{Im}\, p$. Puisque ces deux sous-espaces ont la même dimension, on a $(\mathbf{Ker}\, p)^\perp = \mathbf{Im}\, p$. □

Remarque 1.6. — Un projecteur orthogonal différent de *id* n'est pas un automorphisme orthgonal.

La norme euclidienne de E induit une norme sur $\mathcal{L}(E)$ en posant pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$\|u\|_{\mathrm{op}} := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On remarque que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|u\|_{\mathrm{op}} \|x\|$.

Proposition 1.7. — *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a*
(a) $\|u^*\|_{\mathrm{op}} = \|u\|_{\mathrm{op}}$ *;*
(b) $\|u^* \circ u\|_{\mathrm{op}} = \|u\|_{\mathrm{op}}^2$.

Démonstration. — Si $u \equiv 0$, alors les deux égalités sont évidentes. Supposons que $u \not\equiv 0$.

Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x)|u(x)\rangle \\ &= \langle x|u^* \circ u(x)\rangle \\ &\leq \|x\|\|(u^* \circ u)(x)\| \\ &\leq \|x\|^2\|u^* \circ u\|_{\mathrm{op}}, \end{aligned}$$

d'où $\|u\|_{\mathrm{op}}^2 \leq \|u^* \circ u\|_{\mathrm{op}}$. De plus, pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $u(x) \neq 0$, on a

$$\frac{\|u^*(u(x))\|}{\|x\|} = \frac{\|u^*(u(x))\|}{\|u(x)\|} \times \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

et en passant au sup, on trouve $\|u^* \circ u\|_{\mathrm{op}} \leq \|u^*\|_{\mathrm{op}}\|u\|_{\mathrm{op}}$. On en déduit que $\|u\|_{\mathrm{op}}^2 \leq \|u^* \circ u\|_{\mathrm{op}} \leq \|u^*\|_{\mathrm{op}}\|u\|_{\mathrm{op}}$.
Comme $u \not\equiv 0$, alors $\|u\|_{\mathrm{op}} \neq 0$, d'où $\|u\|_{\mathrm{op}} \leq \|u^*\|_{\mathrm{op}}$. En utilisant cette dernière inégalité avec l'endomorphisme u^*, on a $\|u^*\|_{\mathrm{op}} \leq \|(u^*)^*\|_{\mathrm{op}} = \|u\|_{\mathrm{op}}$ d'où $\|u^*\|_{\mathrm{op}} = \|u\|_{\mathrm{op}}$. Finalement $\|u\|_{\mathrm{op}}^2 \leq \|u^* \circ u\|_{\mathrm{op}} \leq \|u^*\|_{\mathrm{op}}\|u\|_{\mathrm{op}} = \|u\|_{\mathrm{op}}^2$, d'où $\|u^* \circ u\|_{\mathrm{op}} = \|u\|_{\mathrm{op}}^2$. □

Remarque 1.8. — Si p est un projecteur orthogonal non nul de E, alors $\|p\|_{\mathrm{op}} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} \leq 1$ d'après la proposition 1.5. Ce sup est atteint en tout $x \in \mathbf{Im}\, p$. On en déduit que $\|p\|_{\mathrm{op}} = 1$.

Manel

2. Automorphismes orthogonaux

Théorème 2.1. — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $u \in \mathcal{O}(E)$;

(b) u conserve la norme : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$;

(c) u conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E$, $\langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle$;

(d) L'image par u de toute b.o.n. de E est une b.o.n. de E.

(e) Il existe une b.o.n. de E telle que l'image par u est une b.o.n. de E ;

(f) Il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E telle que $A^T A = I_n$, où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$;

(g) Il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E telle que $AA^T = I_n$, où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Démonstration. — On peut tout d'abord remarquer que

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff u \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ et } u^{-1} = u^* \iff u \circ u^* = u^* \circ u = \mathrm{Id}_E.$$

(a) $\Rightarrow$ (b) : $\forall x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \langle u(x)|u(x)\rangle = \langle x|u^* \circ u(x)\rangle = \langle x|x\rangle = \|x\|^2$, d'où $\|u(x)\| = \|x\|$.

(b) $\Rightarrow$ (c) : $\forall x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} 4\langle u(x)|u(y)\rangle &= \|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2 \\ &= \|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2 \\ &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \\ &= 4\langle x|y\rangle. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(c) $\Rightarrow$ (d) : si $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ est une b.o.n. de E et $\mathcal{B}' = \{u(e_i)\}_{i=1}^n$, alors pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\langle u(e_i)|u(e_j)\rangle = \langle e_i|e_j\rangle = \delta_{i,j}$. Donc $\mathcal{B}'$ est orthonormée et par suite libre. Comme le $\mathbf{card}\,\mathcal{B}' = n = \dim E$, la famille $\mathcal{B}'$ est une b.o.n. de E.

(d) $\Rightarrow$ (e) : car l'espace euclidien E possède au moins une b.o.n.

(e) $\Rightarrow$ (f) : si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ alors $u(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,j}e_k$ et $\langle u(e_i)|u(e_j)\rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}$. Or $\langle u(e_i)|u(e_j)\rangle = \langle e_i|e_j\rangle\delta_{i,j}$ et $A^TA = (c_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}$. Donc $A^TA = I_n$.

(f) $\Rightarrow$ (g) : conséquence du fait qu'une matrice est inversible à droite si et seulement si, elle est inversible à gauche si, et seulement si, elle est inversible.

(g) $\Rightarrow$ (a) : On a $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^T$, donc $u \in GL(E)$ et $u^{-1} = u^*$, c-à-d. $u \in \mathcal{O}(E)$.

$\square$

Théorème 2.2 **(Groupe orthogonal)**. — *(a)* $\mathcal{O}(E)$ *est un sous-groupe de* $GL(E)$ *appelé* **groupe orthogonal** *de* E *; ou groupe des isométries de* E *;*

(b) Pour tout $u \in \mathcal{O}(E)$, $\mathbf{det}\,u = \pm 1$ *;*

(c) $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E),\ \mathbf{det}\,u = +1\}$ *est un sous-groupe de* $\mathcal{O}(E)$ *appelé* **groupe spécial orthogonal** *ou groupe des rotations vectorielles de* E.

Démonstration. — (a) On a $\mathcal{O}(E) \subset GL(E)$ et $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$, puisque $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$.
Soient $u, v \in \mathcal{O}(E)$. On a $\forall x \in E$, $\|u\circ v^{-1}(x)\| = \|v^{-1}(x)\|$ car u conserve la norme. Or $\|x\| = \|\mathrm{Id}_E(x)\| = \|v\circ v^{-1}(x)\| = \|v^{-1}(x)\|$ car v conserve la norme. Par conséquent $\|u\circ v^{-1}(x)\| = \|v^{-1}(x)\| = \|x\|$. Ainsi $u\circ v^{-1}$ conserve la norme et donc $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

(b) Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $u \circ u^* = \mathrm{Id}_E$. Comme $\mathbf{det}(u^* \circ u) = (\mathbf{det}\, u^*)(\mathbf{det}\, u)$ et $\mathbf{det}\, u^* = \mathbf{det}\, u$, on a $(\mathbf{det}\, u)^2 = 1$.

(c) L'application $\theta : \mathcal{O}(E) \to \{-1, +1\}$ définie par $\theta(u) = \mathbf{det}\, u$ est un morphisme du groupe $(\mathcal{O}(E), \circ)$ dans le groupe $(\{-1, +1\}, \times)$. Son noyau, $\mathbf{Ker}\, \theta = \{u \in \mathcal{O}(E),\ \mathbf{det}\, u = +1\} = \mathcal{SO}(E)$ est donc un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ (distingué d'indice 2) de $\mathcal{O}(E)$. □

Remarque 2.3. — (a) Le sous-groupe $\mathcal{SO}(E)$ est parfois noté, $\mathcal{O}^+(E)$. L'ensemble $\mathcal{O}^-(E) = \{u \in \mathcal{O}(E),\ \mathbf{det}\, u = -1\}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ puisqu'il n'est pas stable par la loi $\circ$.

(b) Un automorphisme orthogonal u de E est une application qui conserve l'orthogonalité, c-à-d. $\forall x, y \in E$

$$\langle x|y\rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x)|u(y)\rangle = 0$$

mais une application qui conserve l'orthogonalité n'est pas nécessairement pas un automorphisme orthogonal comme le montre l'exemple d'une homothétie de rapport $\lambda \notin \{-1, 1\}$.

(c) Un automorphisme orthogonal u de E conserve les mesures d'angles géométriques. En effet, pour x, y non nuls dans E, on a

$$\widehat{(x, y)} = \arccos(\frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\|y\|}) = \arccos(\frac{\langle u(x)|u(y)\rangle)}{\|u(x)\|\|u(y)\|}) = (u\widehat{(x), u}(y)).$$

(d) Un automorphisme orthogonal de E est parfois appelé **isométrie** de E.

On revient sur la notion de symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel traitée dans le paragraphe 5 du chapitre 3.

Proposition 2.4. — *Soit F un sous-espace vectoriel de E et s_F la symétrie par rapport à F, $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E - 2p_{F^\perp}$. On a,*

(a) $\forall x, y \in E$, $\langle s_F(x)|y\rangle = \langle x|s_F(y)\rangle$, autrement dit s_F est autoadjoint.

(b) $\forall x, y \in E$, $\langle s_F(x)|s_F(y)\rangle = \langle x|y\rangle$, autrement dit s_F est une isométrie.

(d) Si F est de dimension $p \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe alors une b.o.n. de E dans laquelle la matrice de s_F est $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{det}\, s_F = (-1)^{n-p}$.

Démonstration. — A faire par l'étudiant. □

Definition 2.5. — *On appelle* **réflexion** *une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan et* **demi-tour** *ou* **retournement** *une symétrie orthogonale par rapport à une droite.*

Remarque 2.6. — D'après la proposition 2.4, si s_H est une réflexion, on a $\mathbf{det}\, s_H = (-1)^{n-(n-1)} = -1$ et si s_D est un demi-tour, on a $\mathbf{det}\, s_D = (-1)^{n-1}$.

Comme conséquence du Théorème 2.1 on a :

Théorème et définition 2.7. — *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite* **orthogonale** *si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :*
(a) $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^T$;
(b) $AA^T = I_n$;
(c) $A^T A = I_n$;
(d) Les vecteurs colonnes de A forment une b.o.n. pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$;
(e) Les vecteurs lignes de A forment une b.o.n. pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$;

Théorème et définition 2.8. — *(a) L'ensemble des matrices orthogonale est un sous-groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé* **groupe orthogonal** *et il sera noté $\mathcal{O}(n)$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;*
(b) Si $A \in \mathcal{O}(n)$, alors $\mathbf{det}\, A = \pm 1$ *;*
(c) $\mathcal{SO}(n) = \{A \in \mathcal{O}(n),\ \mathbf{det}\, A = +1\}$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathcal{O}(n)$ appelé **groupe spécial orthogonal**.

Démonstration. — On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel. Soit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Si $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \iff A \in \mathcal{O}(n)$.
L'application $\psi : \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{O}(n)$, $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de $(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n), \circ)$ sur $(\mathcal{O}(n), \times)$. On en déduit (a), (b) et (c). □

Remarque 2.9. — $A \in \mathcal{O}(n) \Rightarrow \mathbf{det}\, A = \pm 1$ mais la réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de déterminant 1, alors que $A^T A = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$ si $\alpha \neq 0$.

Proposition 2.10. — *Soit $\mathcal{B}$ une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ et soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \in O(n)$. On a les équivalences suivantes :*
(a) $\mathcal{B}$ est une b.o.n. directe $\iff P \in SO(n)$;
(b) $\mathcal{B}$ est une b.o.n. indirecte $\iff P \in O^-(n)$.

Démonstration. — Conséquence directe de $\mathbf{det}\, P = \pm 1$. □

Théorème 2.11. — *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.*

(a) $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ *et les sous-espaces propres sont orthogonaux.*

(b) u est diagonalisable si, et seulement si, u est une symétrie orthogonale de E.

(c) Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u et l'application induite $u_{|_F}$ (resp. $u_{|_{F^\perp}}$) par u sur F (resp. sur $F^\perp$) est un élément de $\mathcal{O}(F)$ (resp. $\mathcal{O}(F^\perp)$).

(d) $\mathbf{Ker}(u - id_E)$ *et* $\mathbf{Im}(u - id_E)$ *sont supplémentaires orthogonaux,*

$$E = \mathbf{Ker}(u - id_E) \oplus^\perp \mathbf{Im}(u - id_E)$$

(e) La matrice de passage d'une b.o.n. à une autre b.o.n. est orthogonale.

(f) Si $A \in \mathcal{O}^+(n)$ et n impair, alors 1 est une valeur propre de A.

Démonstration. — (a) Si λ est une valeur propre de u, il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Comme $\|u(x)\| = \|x\|$, alors $\|\lambda x\| = \|x\|$ et $|\lambda|\|x\| = \|x\|$ ce qui entraîne que $|\lambda| = 1$, puisque $x \neq 0$.

Notons $E_u(1) = \mathbf{Ker}(u - id)$ et $E_u(1) = \mathbf{Ker}(u + id)$ les sous-espaces propres associés aux valeurs propres éventuelles 1 et -1. Pour $(x, y) \in E_u(1) \times E_u(-1)$, on a $\langle x|y\rangle = \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x| - y\rangle = -\langle x|y\rangle$, donc $\langle x|y\rangle = 0$ et $E_u(1) \perp E_u(-1)$.

(b) Si u est diagonalisable, $E = E_u(1) \oplus E_u(-1)$. Donc u est la symétrie orthogonale par rapport à $E_u(1) = \mathbf{Ker}(u - id)$.

(c) Soit F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, $u(F) \subset F$. Notons $u_{|_F}$ la restriction de u à F, alors $u_{|_F} : F \to F$ est linéaire et $u_{|_F} \in \mathcal{L}(F)$. Comme $\forall x \in F$, $\|u_{|_F}(x)\| = \|u(x)\| = \|x\|$, donc $u_{|_F} \in \mathcal{O}(F)$.
F étant stable par u, $F^\perp$ est stable par $u^* = u^{-1}$, donc $u^{-1}(F^\perp) \subset F^\perp$ ou encore $F^\perp \subset u(F^\perp)$. Puisque u est inversible $u(F^\perp)$ a la même dimension que $F^\perp$, d'où $u(F^\perp) = F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par u. On montre comme ci-dessus que $u_{|_{F^\perp}} \in \mathcal{O}(F^\perp)$.

(d) D'après la Proposition 1.3, $\mathbf{Ker}((u - id_E)^*) = (\mathbf{Im}(u - id_E))^\perp$. Comme $(u - id_E)^* = u^* - id_E^* = u^{-1} - id_E = u^{-1}(id_E - u)$, donc $\mathbf{Ker}((u - id_E)^*) = \mathbf{Ker}(u^{-1}(id_E - u)) = \mathbf{Ker}(id_E - u)$. D'où le résultat.

(e) Comme $id_E \in \mathcal{O}(E)$, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des b.o.n. de E, la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E)$ est orthogonale.

(f) Soit $A \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$. On a $A - I_n = A - AA^T = A(I_n - A^T) = A(I_n - A)^T$, donc $\mathbf{det}(A - I_n) = \mathbf{det}(A)\,\mathbf{det}(I_n - A) = (-1)^n\,\mathbf{det}(A)\,\mathbf{det}(A - I_n) = (-1)^n\,\mathbf{det}(A - I_n)$. Par conséquent, si n est impair, $\mathbf{det}(A - I_n) = -\mathbf{det}(A - I_n)$, d'où $\mathbf{det}(A - I_n) = 0$ et 1 est une valeur propre. $\square$

Soit $\mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont > 0. Alors il est facile de montrer le lemme suivant :

Lemme 2.12. — *$TS_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.*

***Théorème 2.13* (Interprétation matricielle du procédé de Gram-Schmidt)**

Pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice orthogonale $Q \in O(n)$ et une unique matrice triangulaire supérieure à diagonale strictement positive $R \in TS_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$.

Démonstration. — On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel et sa base canonique $\mathcal{B}_0$ (qui est une b.o.n.).

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, notons $v_1, \dots, v_n$ les vecteurs colonnes de A. Alors $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$. D'après le théorème de Gram-Schmidt, il existe une b.o.n. $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $k = 1, \dots, n$, on ait $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ et $\langle f_k | v_k \rangle > 0$ et ceci équivaut à dire que la matrice de passage $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ appartient à $\mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$. D'autre part, comme $\mathcal{C}$ est orthonormée, la matrice de passage $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{C})$ apparrient à $O(n)$. D'après la formule de changement de bases, on a

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = QR$$

ce qui prouve l'existence.

Montrons l'unicité : supposons qu'on ait $A = Q'R'$ avec $Q' \in O(n)$ et $R' \in \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$ et notons $f_1, \dots, f_n$ les vecteurs colonnes de la matrice $Q' = AR'^{-1}$ et $R' = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Alors $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{C}) = Q'$ et la matrice de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}_0) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = Q'^{-1}A = R'.$$

Comme $A = Q'R'$, on a, pour tout $k = 1, \dots, n$, $v_k = \sum_{i=1}^k m_{ik} f_i$ avec $\langle v_k | f_k \rangle = m_{kk} > 0$. Donc, pour tout $i = 1, \dots, n$, les vecteurs $f_1, \dots, f_i$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i)$, et par suite en forment une base orthonormée. La base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ vérifie donc les conditions du théorème de Gram-Schmidt, d'où par unicité, $R = R'$, puis $Q' = AR^{-1} = Q$. $\square$

3. Groupe orthogonal en dimension 2

On note $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le groupe abélien additif, quotient de $\mathbb{R}$ par le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$: deux réels t, t' définissent le même élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ si et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t' - t = 2k\pi$. Autrement dit, c'est l'ensemble des nombres réels définis modulo 2π.

Rappelons le lemme élémentaire suivant :

Lemme 3.1. — *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\cos(\theta) = a$ et $\sin(\theta) = b$.*

Dans ce qui suint, on munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel $\langle | \rangle$, de la norme correspondante, et de l'orientation définie par la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$.

Proposition et définition 3.2 **(Angle orienté de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$)**

Soient $w, w' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(a) $\langle w|w' \rangle = \|w\|\|w'\| \cos(\theta)$;

(b) $\sin(\theta)$ est du même signe (> 0, $= 0$, < 0) que $\mathbf{det}_{\mathcal{B}_0}(w, w')$.

On appelle θ l'angle orienté de w à w', on le note $\widehat{ww'}$. On a $\widehat{ww'} = -\widehat{w'w}$.

Démonstration. — Soient les vecteurs unitaires $v = \frac{1}{\|w\|}w$ et $v' = \frac{1}{\|w'\|}w'$, alors la condition (a) devient $\cos(\theta) = \langle v|v' \rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que $\langle v|v' \rangle \in [-1, 1]$ et que

$$\langle v|v' \rangle = \pm 1 \iff v \text{ et } v' \text{ sont liés} \iff \mathbf{det}_{\mathcal{B}_0}(v, v') = 0.$$

Par conséquent, en notant $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ le signe de $\mathbf{det}_{\mathcal{B}_0}(v, v')$, on voit que les conditions (a) et (b) sont équivalent à dire que $\cos(\theta) = \langle v|v' \rangle = a \in [-1, 1]$ et $\sin(\theta) = \varepsilon\sqrt{1 - a^2} = b$; d'après le lemme précédent, ceci détermine un unique $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π. □

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, soit le vecteur $x_\theta = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$. C'est l'unique vecteur unitaire x tel que $\widehat{e_1 x} = \theta$. En effet, si $x = ae_1 + be_2$ alors $1 = \|x\| = a^2 + b^2$ et il existe θ tel que $a = \langle u|e_1 \rangle = \cos(\theta)$ d'où $b = \pm \sin(\theta)$. De plus

$$\mathbf{det}_{\mathcal{B}_0}(e_1, x) = \mathbf{det} \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & b \end{pmatrix} = b$$

est du signe de $\sin(\theta)$, d'où $b = \sin(\theta)$.

On va maintenant étudier le groupe $O_2(\mathbb{R})$ des isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Soit $u \in O_2(\mathbb{R})$ et posons $u(e_1) = ae_1 + be_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Alors $a^2 + b^2 = \|u(e_1)\| = \|e_1\| = 1$. D'autre part, comme u préserve le produit scalaire, on a

$$\langle u(e_2)|u(e_1)\rangle = \langle e_2|e_1\rangle = 0$$

donc $u(e_2)$ appartient à a droite $(\mathbb{R}u(e_1))^\perp$, qui est engendré par le vecteur unitaire $-be_1+ae_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, et comme $u(e_2)$ est aussi un vecteur unitaire de cette droite, on a nécessairement $u(e_2) = \pm \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

– Si $u(e_2) = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, alors dans ce cas, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et son déterminant est $a^2 + b^2 = 1$. Par conséquent $u \in O_2^+(\mathbb{R})$. Dans ce cas, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_0$ est de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π.

– Si $u(e_2) = -\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, alors dans ce cas, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ et son déterminant est $-a^2 - b^2 = -1$. Par conséquent $u \in O^-(2)$. Dans ce cas, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_0$ est de la forme

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π.

Ainsi

$$O_2(\mathbb{R}) = \{A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}, \ \ \theta \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ \varepsilon = \mathbf{det}(A) \in \{-1, +1\}\},$$

le réel θ étant unique si on le prend dans $]-\pi, \pi[$.

Une isométrie directe $u \in O_2^+(\mathbb{R})$ de matrice R_θ dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, est appelée **rotation** et θ est une mesure de l'angle de cette rotation. Si on impose θ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, il est alors uniquement déterminée et on dit que c'est la mesure principale de l'angle de la rotation.

On rappelle qu'une **réflexion** dans un espace euclidien est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan (une droite dans ce cas) et que c'est une isométrie indirecte. Une telle réflexion est une involution.

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, une réflexion est donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Si s_D est une réflexion par rapport à la droite, on a alors $s_D(x) = x$ pour tout $x \in D$ et $s_D(x) = -x$ pour tout $x \in D^\perp$. En désignant par f_1 un vecteur non nul de D et f_2 un vecteur non nul de $D^\perp$, la famille (f_1, f_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ et la matrice de s_D dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. De plus la droite D est l'espace des point fixes de s_D, soit $D = \mathbf{Ker}(s_D - id)$.

Les isométries indirectes du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ sont les réflexions. Si

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

est la base d'une isométrie indirecte $u \in O_2^-(\mathbb{R})$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}_0$ et en posant

$$f_1 = \cos(\frac{\theta}{2})e_1 + \sin(\frac{\theta}{2})e_2, \quad f_2 = -\cos(\frac{\theta}{2})e_1 + \sin(\frac{\theta}{2})e_2$$

la matrice de u dans la base (f_1, f_2) est

$$P^T S_\theta P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que u est la réflexion par rapport à la droite $D = \mathbb{R}f_1$.

4. Groupe orthogonal en dimension 3

Nous allons maintenant étudier les isométries en dimension 3. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $E \simeq \mathbb{R}^3$, orienté par le choix d'une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$.

Lemme 4.1. — *Une isométrie $u \in O_3(\mathbb{R})$, a au moins une valeurs propre réelle $\lambda \in \{-1, +1\}$.*

Démonstration. — Le polynôme caractéristique χ_u de u étant de degré 3 à coefficients réels, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il admet au moins une racine réelle λ. Soit x un vecteur propre associé à λ. Comme u conserve la norme $\|x\| = \|u(\lambda x)\| = |\lambda|\|x\|$, d'où $\lambda \in \{-1, +1\}$. □

Remarque 4.2. — (a) Si u est une réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan), sa matrice dans une base orthonormée adaptée est alors

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\chi_u(\lambda) = \mathbf{det}(u - \lambda id) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$.

(b) Si u est un retournement (symétrie orthogonale par rapport à une droite), sa matrice dans une base orthonormée adaptée est alors

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $\chi_u(\lambda) = \mathbf{det}(u - \lambda id) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$.

Théorème 4.3. — *Soit $u \in O_3(\mathbb{R})$ et*

$$H = \mathbf{Ker}(u - id) = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$$

l'ensemble des points fixes de u.

(a) Si $\dim(H) = 3$, on a $u = id$.

(b) Si $\dim(H) = 2$, on a alors $u \in O_3^-(\mathbb{R}) \setminus \{-id\}$ et c'est la réflexion par rapport au plan H. En désignant par (f_1, f_2, f_3) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ où (f_2, f_3) une base orthonormée de H, la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Si $\dim(H) = 1$, on a alors $u \in O_3^+(\mathbb{R}) \setminus \{id\}$ et en désignant par (f_1, f_2, f_3) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ où (f_2, f_3) une base orthonormée de $P = H^\perp$, la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(d) Si $\dim(H) = 0$ *(c-à-d.* $H = \{0\}$*), on a alors* $u \in O_3^-(\mathbb{R})$ *et soit* $u = -id$*, soit* u *est la composée commutative d'une rotation* r_Δ *d'axe* $\Delta = \mathbf{Ker}(u + id)$ *avec une réflexion* s_P *par rapport au plan* $P = \Delta^\perp$ *et, en désignant par* (f_1, f_2, f_3) *une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$ *où* (f_2, f_3) *une base orthonormée de* $P = \Delta^\perp$*, la matrice de* u *dans cette base est*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. — (a) Si $\dim(H) = 3$, alors $H = E$ et $u = id$.

(b) Si $\dim(H) = 2$, alors $H^\perp$ est une droite vectorielle stable par u et dans une b.o.n. (f_1, f_2, f_3) directe adaptée à la somme directe $E = H^\perp \oplus H$, (c-à-d. (f_1) b.o.n. de $H^\perp$ et (f_2, f_3) b.o.n. de H) la matrice de u est

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon = \mathbf{det}(A) = \pm 1$. Comme $\dim(H) = 2$, on a nécessairement $\varepsilon = -1$ et u est la réflexion par rapport au plan H, donc $u \in \mathcal{O}^-(E) \setminus \{-id\}$.

(c) Si $\dim(H) = 1$, on a $u \neq id$ et la restriction v de u au plan stable $P = H^\perp$ est alors une isométrie qui ne peut être une réflexion (elle n'a pas de point fixe non nul), c'est donc une rotation et la matrice de u dans une b.o.n. directe adaptée à $E = H \oplus H^\perp$ est

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

donc $u \in \mathcal{O}^+(E) \setminus \{id\}$.

(d) Si $\dim(H) = 0$, on a alors $H = \{0\}$ et 1 n'est pas valeur propre de u. Dans ce cas -1 est nécessairement valeur propre de u (et $\mathbf{Ker}(u+id) \neq \{0\}$).

– Si $u = -id \in \mathcal{O}^-(E)$, alors c'est terminé.

– Sinon on choisit $f_1 \in \mathbf{Ker}(f + id)$ un vecteur unitaire. Le plan P orthogonal à la droite Δ dirigée par f_1 est stable par u et dans une b.o.n. directe adaptée à la somme directe orthogonale $E = \Delta \oplus P$, la matrice de u est de a forme

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où B est la matrice de la restriction v de u à P. Si $B \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$, alors v est une réflexion et a des points fixes non nuls, ce qui contredit $H = \{0\}$. Donc $B \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ et $\mathbf{det}(A) = -1$, c'est-à-dire que $u \in \mathcal{O}^-(E) \setminus \{-id\}$ et il existe un réels θ tel que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

En remarquons que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on voit que $u = r_{\Delta,\theta} \circ s_P = s_P \circ r_{\Delta,\theta}$ où $r_{\Delta,\theta}$ est la rotation d'axe Δ et d'angle θ et s_P est la réflexion par rapport à $P = \Delta^\perp$.

On déduit de cette étude que si $H = \mathbf{Ker}(u - id) = \{0\}$, et si $u \neq -id$, alors $\mathbf{Ker}(u + id)$ est nécessairement de dimension 1, c'est donc l'axe Δ de la rotation $r_{\Delta,\theta}$ qui compose l'isométrie $u = r_{\Delta,\theta} \circ s_P$.

□

Remarque 4.4. — Comme $\dim E = 3$, si (v_1, v_2) est une b.o.n. d'un plan P, et si $v_3 = v_1 \wedge v_2$, alors (v_1, v_2, v_3) est une b.o.n. directe de E.

Théorème 4.5. — *Soit u un endomorphisme de E, $u \neq id$. Alors u est une rotation si, et seuelemnt si, il existe un vecteur unitaire f_3 et un réel $\theta \in]-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ tels que*

$$u(x) = \cos(\theta)x + (1 - \cos(\theta))\langle f_1 | x\rangle f_1 + \sin(\theta)(f_1 \wedge x), \quad \forall x \in E. \qquad (1)$$

Dans ce cas la droite $\Delta = \mathbb{R}f_1$ est l'axe orienté de la rotation, θ la mesure principale de son angle et pour tout vecteur x unitaire et orthogonal au vecteur f_1, on a

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \langle x | u(x)\rangle, \\ 1 + 2\cos(\theta) &= \mathbf{tr}(u) \\ \sin(\theta) &= [x, u(x), f_1] = \mathbf{det}_{\mathcal{B}_0}(x, u(x), f_1) \end{aligned}$$

Démonstration. — Supposons $u \in \mathcal{O}^+(E) \setminus \{-id\}$. On utilise la b.o.n. $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ du théorème précédent où $\mathbb{R}f_1 = \Delta = \mathbf{Ker}(u - id)$ et (f_2, f_3) est une b.o.n. de $P = \Delta^\perp$. Soit $x \in E$, puis posons $x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$ et $u(x) = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3$. Donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cos(\theta)x_2 - \sin(\theta)x_3 \\ \sin(\theta)x_2 + \cos(\theta)x_3 \end{pmatrix} \\
&= \cos(\theta) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1 - \cos(\theta)) \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \cos(\theta)x + (1 - \cos(\theta))\langle f_1 | x \rangle f_1 + \sin(\theta)(f_1 \wedge x).
\end{aligned}$$

Réciproquement, si $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{-id\}$ vérifie (1), on choisit une vecteur unitaire f_2 orthogonal à f_1, puis $f_3 = f_1 \wedge f_2$. Donc (f_1, f_2, f_3) est une b.o.n. directe et on a

$$\begin{aligned}
u(f_1) &= \cos(\theta)f_1 + (1 - \cos(\theta))f_1 = f_1 \\
u(f_2) &= \cos(\theta)f_2 + \sin(\theta)(f_1 \wedge f_2) = \cos(\theta)f_2 + \sin(\theta)(f_1 \wedge f_2) \\
&= \cos(\theta)f_2 + \sin(\theta)f_3 \\
u(f_3) &= \cos(\theta)f_3 + \sin(\theta)(f_1 \wedge f_3) = \cos(\theta)f_3 + \sin(\theta)(-f_2) \\
&= -\sin(\theta)f_2 + \cos(\theta)f_3.
\end{aligned}$$

Donc la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et u est la rotation d'axe $\Delta = \mathbb{R}f_1$ et d'angle de mesure principale θ.

Si $x \in (\mathbb{R}f_1)^\perp$ est unitaire, alors $x = x_2 f_2 + x_3 f_3$ et $x_2^2 + x_3^2 = 1$. De plus $u(x) = (\cos(\theta)x_2 - \sin(\theta)x_3)f_2 + (\sin(\theta)x_2 + \cos(\theta)x_3)f_3$. Donc

$$\langle x | u(x) \rangle = \cos(\theta)(x_2^2 + x_3^2) = \cos(\theta).$$

La relation

$$1 + 2\cos(\theta) = \mathbf{tr}(u)$$

est évidente. Enfin

$$\begin{aligned}[x,u(x),f_1] &= \mathbf{det}_{\mathcal{B}_0}(x,u(x),f_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & \cos(\theta)x_2 - \sin(\theta)x_3 & 0 \\ x_3 & \sin(\theta)x_2 + \cos(\theta)x_3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \sin(\theta)(x_2^2 + x_3^2) = \sin(\theta).\end{aligned}$$

□

Proposition 4.6. — *Si $u = r_{\Delta,\theta} \circ s_P$ est la composée d'une rotation $r_{\Delta,\theta}$ et d'une réflexion s_P, alors l'axe de la rotation est $\Delta = \mathbf{Ker}(u+id) = \mathbb{R}f_1$ et et la mesure principale de l'angle est déterminé par*

$$\begin{aligned} -1 + 2\cos(\theta) &= \mathbf{tr}(u) \\ \sin(\theta) &= [x,u(x),f_1] = \mathbf{det}_{\mathcal{B}_0}(x,u(x),f_1) \end{aligned}$$

pour tout vecteur unitaire $x \in \Delta^\perp$.

Démonstration. — Découle des deux théorèmes précédents. □

On peut aussi résumé cette étude comme suit :

Théorème 4.7. — *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, soit $u \in \mathcal{O}(E) - \backslash id$ et soit A la matrice de u dans la base canonique de E.*

(a) Si $\mathbf{det}(A) = 1$, alors $u = r_{\Delta,\theta}$ est une rotation d'axe $\Delta = \mathbf{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R}e$ et d'angle θ vérifiant $1 + 2\cos(\theta) = \mathbf{tr}(u)$ et $signe(\sin(\theta)) = signe([x, Ax, e])$ pour tout vecteur non colinéaire à e.

(b) Si $\mathbf{det}(A) = -1$, alors

(i) si A est symétrique, alors $u = s_P$ est la symétrie orthogonale par rapport au plan $P = \mathbf{Ker}(A - I_3)$

(ii) si A n'est pas symétrique, alors $u = r_{\Delta,\theta} \circ s_P = s_P \circ r_{\Delta,\theta}$ où $r_{\Delta,\theta}$ est la rotation d'axe $\Delta = \mathbf{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R}e$ et d'angle θ vérifiant $-1+2\cos(\theta) = \mathbf{tr}(u)$ et $signe(\sin(\theta)) = signe([x, Ax, e])$ pour tout vecteur non colinéaire à e et s_P est symétrie orthogonale par rapport au plan $P = \Delta^\perp$.

5. Exemples d'isometries en dimension 3 : méthode

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), qui est une base orthonormale directe (son déterminant est égal à $+1$), $\mathbb{R}^3$ est un espace euclidien orienté (par le choix de la b.o.n. (e_1, e_2, e_3)).

5.1. Rotation. — Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- $\star$ Les vecteurs colonnes de la matrice A sont tous de norme 1, par exemple pour le premier vecteur colonne on trouve $(-2/3)^2+(2/3)^2+(1/3)^2 = 1$. Les trois vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux, par exemples pour les deux premiers on trouve $(-2/3)(-1/3)+(2/3)(-2/3) + (1/3)(2/3) = 0$. On en déduit que $A \in O_3(\mathbb{R})$.
- $\star$ $\mathbf{det}(A) = +1$, donc u est une rotaion $r_{\Delta,\theta}$ d'axe Δ et d'angle θ.
- $\star$ Recherche de l'axe de rotation : $\Delta = \mathbf{Ker}(u - id)$, espace des invariants.

  Pour cela on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss sur la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -5/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -5/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

  (on peut aussi considérer $3A - 3I_3$ pour éviter les fractions)

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 9 & -3 \\ 0 & -9 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Donc un vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbf{Ker}(u - id)$, ssi $-3y + z = 0$ et $x - y = 0$ ssi $v = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Par conséquent, Δ est l'axe orienté et dirigé par le vecteur $e = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- $\star$ Recherche de l'angle. De la relation $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(A) = -\frac{2}{3}$, on trouve $\cos\theta = -\frac{5}{6}$. Pour déterminer θ, il suffit de connaitre le signe

de $\sin\theta$ qui est le même que celui du produit mixte $[f, u(f), e]$ pour n'importe quel vecteur u non colinéaire à e. On peut prendre tout simplement $f = e_1$, donc

$$[e_1, u(e_1), e] = \mathbf{det}(e_1, u(e_1), e) = \begin{vmatrix} 1 & -2/3 & 1/\sqrt{11} \\ 0 & 2/3 & 1/\sqrt{11} \\ 0 & 1/3 & 3/\sqrt{11} \end{vmatrix} = 5/3\sqrt{11} > 0$$

On en déduit que $\theta = \arccos(-\frac{5}{6})$.

⋆ Conclusion : u est la rotation d'axe dirigé et orienté par vecteur $\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta = \arccos(-\frac{5}{6})$.

5.2. Réflexion. — Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/9 & -4/9 & -1/9 \\ -4/9 & -7/9 & -4/9 \\ -1/9 & -4/9 & 8/9 \end{pmatrix}$$

⋆ Les vecteurs colonnes de la matrice A sont tous de norme 1, par exemple pour le premier vecteur colonne on trouve $(8/9)^2+(-4/9)^2+(-1/9)^2 = 1$. Les trois vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux, par exemples pour les deux premiers on trouve $(8/9)(-4/9)+(-4/9)(-7/9) + (-1/9)(-4/9) = 0$. On en déduit que $A \in O_3(\mathbb{R})$.

⋆ $\mathbf{det}(A) = -1$, et $A^T = A$, donc u est une réflexion.

⋆ Recherche du plan de réflexion : $P = \mathbf{Ker}(u - id)$, espace des invariants.

On applique la méthode du pivots de Gauss à la matrice

$$A - I_3 = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc P est le plan d'équation $x + 4y + z = 0$.

⋆ Conclusion : u est la réflexion par rapport au plan d'équation $x + 4y + z = 0$.

5.3. Composée d'une rotation et d'une réflexion. — Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & \sqrt{6}/4 \\ 1/4 & 3/4 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- ⋆ Les vecteurs colonnes de la matrice A sont tous de norme 1 et deux à deux orthogonaux. On en déduit que $A \in O_3(\mathbb{R})$.
- ⋆ $\mathbf{det}(A) = -1$ et $A^T = -A$ (la matrice A n'est pas symétrique), donc u est la composée commutative d'une rotation $r_{\Delta,\theta}$ et d'une réflexion s_P de plan $P = \Delta^{\perp}$, $u = r_{\Delta,\theta} \circ s_P = s_P \circ r_{\Delta,\theta}$
- ⋆ Recherche de l'axe de rotation Δ.
  Dans ce cas l'axe $\Delta = \mathbf{Ker}(u + id)$. On applique la méthode du pivots de Gauss à la matrice

$$A+I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{6} \\ -1 & 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Donc un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{Ker}(u + id)$ ssi $-x + y = 0$ et $z = 0$, d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On normalise ce vecteur, par conséquent l'axe Δ est la droite dirigé et orienté par $e = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- − Recherche de l'angle de rotation.
  De la relation $-1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(A) = -2$, on trouve $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$. Pour déterminer exactement θ, on cherche le signe de $\sin\theta$. Le vecteur e_1 de la bse canonique n'est pas colinéaire à e, et

$$[e_1, u(e_1), e] = \mathbf{det}(e_1, f(e_1), e) = \begin{vmatrix} 1 & -3/4 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/4 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{6}/4 & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{3}/4 < 0$$

  donc $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

- ⋆ Recherche du plan de réflexion.

  Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P = \Delta^{\perp}$ ssi $\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, e\rangle = 0$ ssi $x + y = 0$.

  Ainsi P est le plan d'équation $x + y = 0$.
- ⋆ Conclusion : $u = r_{\Delta,\theta} \circ s_P = s_P \circ r_{\Delta,\theta}$ est la composée commutative de la rotation $r_{\Delta,\theta}$ d'axe orienté et dirigé par le vecteur e et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et de la réflexion s_P de plan d'équation $x + y = 0$.

---

version 1, 18 avril 2018