CHAPITRE 3
ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Table des matières

Dans tout ce chapitre E désigne un espace vectoriel réel non nul.

1. Produit scalaire

On rappelle q'une fbs φ sur E est :
– positive si $\varphi(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in E$,
– définie si pour $x \in E$, l'égalité $\varphi(x,x) = 0$ équivaut à $x = 0_E$.

Definition 1.1. — *On appelle* **produit scalaire** *sur E foute fbs définie positive.*

Un **espace préhilbertien** *est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Un espace préhilbertien de dimension finie est dit* **espace euclidien**.

Dans le cas où E est un espace euclidien de dimension n, on peut aussi dire qu'un produit scalaire sur E est la forme polaire d'une forme quadratique de signature $(n, 0)$.

On notera, quand il n'y a pas d'ambiguïté $(x,y) \mapsto \langle x|y\rangle$ ou $(x,y) \mapsto (x|y)$ un tel produit scalaire et pour $x=y$, $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$. L'application $x \mapsto \|x\|^2 = \langle x|x\rangle$ est tout simplement la forme quadratique associée à $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

Exemples 1.2. — (a) Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et considérons l'application définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi : (x,y) \mapsto \langle x|y\rangle = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$$

Il est clair que cette application est bilinéaire. Elle est symétrique si et seulement si $b=c$.

Pour $b=c$, φ est bilinéaire symétrique et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\langle x|x\rangle = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2.$$

Si on a un produit scalaire, alors pour $x = e_1 = (1,0)$, $a = \langle e_1|e_1\rangle > 0$, et pour tout vecteur $x = e_1 + te_2$, où $t \in \mathbb{R}$, on a $\langle x|x\rangle = a + 2bt + dt^2 > 0$, ce qui équivaut à dire que le discriminant $\delta = b^2 - ad < 0$.

Réciproquement, si $b=c$, $a>0$ et $b^2 - ad < 0$, alors $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est une fbs et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\langle x|x\rangle &= ax_1^2 + 2nx_1x_2 + dx_2^2\\ &= a\left(x_1^2 + 2\tfrac{b}{a}x_1x_2 + \tfrac{d}{a}x_2^2\right)\\ &= a(x_1 + \tfrac{b}{a}x_2)^2 + \tfrac{ad-b^2}{a}x_2^2 \geq 0\end{aligned}$$

et $\langle x|x\rangle = 0$ si, et seulement si, $x_1 + \frac{b}{a}x_2 = 0$ et $x_2 = 0$, ce équivaut à $x = 0_{\mathbb{R}^2}$.

(b) Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$:

$$(x,y) \mapsto \langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$$

est un produit scalaire. En effet, il s'agit bien d'une fbs car $\langle x|y\rangle = {}^t x I_n y$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ avec $\langle x|x\rangle = 0$ si, et seulement si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

(c) Produit scalaire canonique sur $M_{n,n}(\mathbb{R})$:

$$(A,B) \mapsto \langle A|B\rangle = \mathbf{tr}({}^tAB).$$

L'application est bien une fbs. De plus si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, alors $\langle A|A\rangle = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 \geq 0$ avec $\langle A|A\rangle = 0$ si, et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i,j \in \{1,\dots,n\}$, soit $A = 0$.

(d) Produit scalaire sur $\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})$, espace des fonctions continues sur un intervalle I et de carrée intégrable. :
L'ensemble

$$\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R},\ \text{continue},\ \int_I f(t)^2 dt < +\infty\}$$

est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $f, g \in \mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})$, on a $(\lambda f + g)^2 \leq 2((\lambda f)^2 + g^2)$, donc $\int_I (\lambda f + g)^2 < +\infty$.

On considère l'application

$$(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_I f(t)g(t)dt.$$

Elle est bien définie, car si $f, g \in \mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})$, on a $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$, donc $\int_I fg \leq \frac{1}{2}\int_I f^2 + \frac{1}{2}\int_I g^2 < +\infty$.
Il est claire que $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est une fbs positive. De plus si $\langle f, f\rangle = 0$, alors $\int_I f(t)^2 dt = 0$. Or $t \mapsto f(t)^2$ est continue et positive sur I, donc $f(t)^2 = 0$ pour tout $t \in I$ et par suite $f \equiv 0$ sur I. On en déduit $\langle f, g\rangle = \int_I f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})$.

(e) Produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$, espace des suites numériques $(u_n)_n$ telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge. C'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $u = (u_n), v = (v_n) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$, on a $(\lambda u_n + v_n)^2 \leq 2(\lambda^2 u_n^2 + v_n^2)$, donc la série $\sum_n (\lambda u_n + v_n)^2$ converge.

On considère l'application

$$(u,v) \mapsto \langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$

Elle est bien définie, car si $u = (u_n), v = (v_n) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2|u_n v_n| \leq u_n^2 + v_n^2$. La convergence absolue entraîne donc la convergence de la série $\sum_n u_n v_n$.

De plus l'application $(u,v) \mapsto \langle u, v\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, puisque si $u \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est une suite non nulle, alors $\langle u, u\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 > 0$ car un des u_n au moins est non nul.

(f) Produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: On considère l'application

$$(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)dt$$

où $\omega :]a, b[\mapsto \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue telle que $t \mapsto t^n \omega(t)$ soit intégrable sur $]a, b[$, pour fout $n \in \mathbb{N}$. Cette application est bien définie. C'est une fbs définie positive, puisque pour tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, $\langle P, P\rangle = \int_a^b P(t)^2\omega(t)dt > 0$ car l'application $t \mapsto P(t)^2\omega(t)$ est integrable, continue sur $]a, b[$ positive et non identiquement nulle.

Compétence visée.

Savoir montrer qu'une fb est produit scalaire

Proposition 1.3. — *E est un espace préhilbertien réel de produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Pour tout $x, y \in E$, on a*

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \text{ (Identité du parallélogramme)}$$

Démonstration. — Dèjà faire dans chapitre 2 pour toute fbs. □

2. Inégalité de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Dans ce qui suit E désigne un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

Théorème 2.1 **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)**
Pour tout $x, y \in E$ on a

$$|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

L'égalité étant réalisée si, et seulement si x et y sont liés.

Démonstration. — La démonstration a déjà été faite dans le cadre d'une fbs définie positive. L'idée est la même pour un produit scalaire.

Si $x = 0$, on a alors légalité pour tout $y \in E$.

Si $x \neq 0$ et $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on a encore l'égalité.

On suppose donc x non nul et y non lié à x. La fonction polynomiale P définie par

$$P(t) = \|y + tx\|^2 = \langle y + tx|y + tx\rangle = \|x\|^2t^2 + 2\langle x|y\rangle t + \|y\|^2$$

est à valeurs strictement positive. Le coefficient dominant étant non nul, il en résulte que son discriminant est strictement négatif, soit

$$\langle x|y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 < 0$$

ce qui équivaut à $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

D'autre part, $|\langle x|y\rangle| = \|x\|\|y\|$ si, et seulement si le polynôme P admet une racine (double) $t_0 \in \mathbb{R}$, autrement dit $P(t_0) = 0$ ou encore $\|y+t_0x\| = 0$, ce qui est équivalent à $y + t_0x = 0$, c-à-d., x et y liés. $\square$

Remarque 2.2. — L'inégalité de Caucgy-Schwarz nous dit que pour tous vecteurs non nuls $x, y \in E$, on a

$$-1 \leq \frac{\langle x; y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$$

ce qui implique qu'il existe un unique nombre réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\langle x; y\rangle = \cos(\theta)\|x\|\|y\|.$$

Le réel θ est la mesure dans $[0, \pi]$ de l'angle géométrique (ou angle non orienté) que font les vecteurs x et y dans E.

Pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, on a $\langle x; y\rangle = \|x\|\|y\|$, ce qui équivaut à dire que les vecteurs x et y sont colinéaires.

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\langle x; y\rangle = 0$, ce qui équivaut à dire que les vecteurs x et y sont orthogonaux.

De manière générale, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\cos(\theta)\|x\|\|y\| + \|y\|^2.$$

Exemples 2.3. — Reprenons 1.2.

(a) Pour le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, on a pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{1/2}.$$

(b) Pour le produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$, on a pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$|\,\mathbf{tr}({}^tAB)| \leq (\mathbf{tr}({}^tAA))^{1/2}(\mathbf{tr}({}^tBB))^{1/2}.$$

(c) Pour le produit scalaire dans $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$, on a pour tout $f, g \in \mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$,

$$|\int f(t)g(t)dt| \leq (\int f(t)^2dt)^{1/2}(\int g(t)^2dt)^{1/2}.$$

(d) Pour le produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, on a pour tout (u_n),$(v_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$,

$$|\sum_{n=0}^{\infty} u_nv_n| \leq (\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2)^{1/2}(\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2)^{1/2}.$$

***Théorème 2.4* (Inégalité de Minkowski).** — *Pour tout $x, y \in E$, on a*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

L'égalité étant réalisée si, et seulement si $x = 0$ ou $x \neq 0$ et $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (i.e. x et y positivement liés).

Démonstration. — Si $x = 0$, on a égalité quelque soit $y \in E$.
Si $x \neq 0$ et $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \|(1+\lambda)x\| \\ &= |1+\lambda|\|x\| \\ &\leq (1+|\lambda|)\|x\| = \|x\| + |\lambda\|x\| = \|x\| + \|\lambda x\| \end{aligned}$$

L'égalité etant réalisée pour $\lambda \geq 0$.
Pour $\lambda < 0$, l'inégalité est stricte puisque $|1+\lambda| < 1 + |\lambda|$.
Si $x \neq 0$ et x, y linéairement indépendants, on a

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &< \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \quad \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

ce qui conduit à $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Remarque 2.5. — On peut montrer par récurrence que pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_p \in E$,

$$\|x_1 + \cdots + x_p\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_p\|.$$

Exemples 2.6. — (a) Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique (voir 1.2), l'inégalité de Minkowski prend la forme suivante

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

(b) Dans l'espace $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[a,b]$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$, l'inégalité de Minkowski s'écrit

$$\sqrt{\int_a^b (f(t)+g(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} + \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

Remarque 2.7. — L'application $E \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}^+$ vérifie donc les propriétés d'une norme :

(1) $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$;
(2) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;
(3) $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

L'application $x \mapsto \|x\|$ est appelé **norme** de E associée à $\langle \cdot ; \cdot \rangle$.

3. Orthogonalité

Definition 3.1. — *(a) Deux vecteurs x et y de E sont dits* **orthogonaux** *si $\langle x, y\rangle = 0$, cette relation est notée $x \perp y$.*

(b) Soit X une partie non vide de E et $x \in E$. On dit que x est orthogonal à X s'il est orthogonal à tout vecteur de X.
*L'***orthogonal** *de X, noté $X^\perp$, est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de X,*

$$X^\perp = \{x \in E;\ \forall y \in X,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Si X est une partie vide, alors $X^\perp = E$.

Remarque 3.2. — (a) Pour tout $x, y \in E$, $x \perp y \iff y \perp x$.

(b) Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Un vecteur x est orthogonal à F si, il existe une base $\mathcal{B}$ de F dont tout élément est orthogonal à x. En effet l'application $F \ni y \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire, elle est nulle sur F si, et seulement si, elle est nulle sur $\mathcal{B}$.

Exemple 3.3. — Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère

$$F = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 2, -1, 1), v_2 = (0, 1, 1, 2)\}.$$

en est une base. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, alors

$$\begin{aligned} x \in F^\perp &\iff x \perp v_1,\ \text{et } x \perp v_2 \\ &\iff \langle x; v_1\rangle = 0,\ \text{et } \langle x; v_2\rangle = 0 \\ &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi
$$F^{\perp} = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; \left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 \quad = 0 \end{array} \right. \}.$$

Compétence visée.

Savoir déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

***Théorème 3.4* (de Pythagore).** — *(a) Deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux si, et seulement si,*
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$
(b) Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des vecteurs de E deux à deux orthogonaux, alors
$$\|x_1 + \cdots x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots \|x_n\|^2.$$

Démonstration. — (a) On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$, donc $x \perp y$ ssi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) On a
$$\begin{aligned} \|\textstyle\sum_{i=1}^n x_i\|^2 &= \langle \textstyle\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_i \rangle \\ &= \textstyle\sum_{l=1}^n \|x_i\|^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle x_i, x_j \rangle. \end{aligned}$$
Comme pour $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$, donc $\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{l=1}^n \|x_i\|^2$. □

Les propriétés de la proposition suivante ne sont pas difficiles à établir. Leur démonstration est laissée aux lecteurs.

Proposition 3.5. — *(a) Si X est une partie de E, alors $X^{\perp} = (\mathrm{Vect}(X))^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

(b) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$.

(c) $E^{\perp} = \{0_E\}$. Autrement dit
$$(\forall y \in E,\ \langle x, y \rangle = 0) \Rightarrow x = 0_E.$$

Exemple 3.6. — On peut utiliser la propriété (c) de la proposition pour montrer par exemple que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est telle que $\mathbf{tr}({}^t AB) = 0$ pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$, alors $A = 0$.

Definition 3.7. — *Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits orthogonaux, et on notera $F \perp G$ si, tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre :*
$$F \perp G \iff F \subset G^{\perp} \iff G \subset F^{\perp}. \tag{1}$$

Remarque 3.8. — Attention : Deux sous-espaces sont orthogonaux ne signifie pas forcement que l'un est l'orthogonal de l'autre. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$ deux droites orthogonales ne signifie pas que l'une est l'orthogonal de l'autre, puisque l'orthogonal d'une droite est un plan.

Théorème 3.9 **(Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux)**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E (c-à-d. $E = F \oplus G$). On a équivalence entre :
(a) F et G sont orthogonaux ;
(b) $F^\perp = G$;
(c) $G^\perp = F$.
Dans ce cas on note $E = F \oplus^\perp G = F \oplus^\perp F^\perp$ et on dira que F et G sont **supplémentaires orthogonaux**.

Démonstration. — D'après (Équation 1) les implications (b) $\Rightarrow$ (a) et (c) $\Rightarrow$ (a) sont évidentes.
(a) $\Rightarrow$ (b) : Supposons que F et G sont orthogonaux, alors $G \subset F^\perp$. Soit $x \in F^\perp \subset E = F \oplus G$, donc il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. On a alors $\|y\|^2 = \langle y, y\rangle = \langle y, x - z\rangle = \langle y, x\rangle - \langle y, z\rangle = 0 - 0 = 0$. Donc $y = 0$ et $x = z \in G$. Par conséquent $F^\perp = G$. Comme F et G jouent le même roles, on a aussi (a) $\Rightarrow$ (c). $\square$

Exemple 3.10. — Dans $M(n, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, les sous-espaces $Sym(n, \mathbb{R})$ et $Asym(n, \mathbb{R})$ (des matrices symétriques et matrices antisymétriques respectivement) sont supplémentaires

$$M(n, \mathbb{R}) = Sym(n, \mathbb{R}) \oplus Asym(n, \mathbb{R})$$

Ces deux sous-espaces sont orthogonaux, car si $A \in Sym(n, \mathbb{R})$ et $B \in Asym(n, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle A; B\rangle &= \mathbf{tr}({}^tAB) \\ &= \mathbf{tr}(AB) \\ &= \mathbf{tr}(BA) \\ &= -\mathbf{tr}(-BA) \\ &= -\mathbf{tr}({}^tBA) = -\langle B; A\rangle = -\langle A; B\rangle \end{aligned}$$

Donc $\langle A; B\rangle = 0$. On en déduit que $Sym(n, \mathbb{R})^\perp = Asym(n, \mathbb{R})$.

Proposition 3.11. — *Soit E un espace vectoriel euclidien. Une application $\ell : F \mapsto \mathbb{R}$ est une forme linéaire si, et seulement si, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall x \in E$, $\ell(x) = \langle x; a\rangle$. Autrement dit, un* *espace euclidien est canoniquement isomorphe à son dual E^* l'isomorphisme canonique étant : $\varphi : E \to E^*$, $x \mapsto \langle x; \cdot\rangle$*

Démonstration. — Rappelons que E et E^* sont deux espaces vectoriels de dimension finie et $\dim E = \dim E^*$.
L'application $\varphi : E \to E^*$, $x \mapsto \langle x; \cdot\rangle$ est une application linéaire. De plus,

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{Ker}\,\varphi &\iff \langle x; v\rangle = 0,\ \forall v \in E \\ &\iff x \in E^{\perp} = \{0\} \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{Ker}\,\varphi = \{0\}$ et φ est un isomorphisme. Par conséquent, $\forall \ell \in E^*$, $\exists!\, a \in E$ tel que $\ell(x) = \langle x; a\rangle$, $\forall x \in E$. □

Definition 3.12. — *On dit qu'une famille $F_1, \ldots, F_p$ de sous-espaces vectoriel de E est orthogonale si, et seulement si, $F_i \perp F_j$, $\forall i \neq j$.*

Proposition 3.13. — *Toute famille orthogonale de sous-espaces vectoriels de E est en somme directe.*

Démonstration. — Soit $F_1, \ldots, F_p$ une famille orthogonale de sous-espaces vectoriels de E et soit $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tels que $x_1 + \ldots + x_p = 0$. D'après l'identité de Pythagore, $0 = \|x_1 + \ldots + x_p\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_p\|^2$, donc $x_1 = \ldots = x_p = 0$. □

On notera alors $F_1 + \ldots + F_p = F_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} F_p$ et on dira qu'on a une **somme directe orthogonale**.

Definition 3.14. — *Une famille de vecteur $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite* **famille orthogonale** *si $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour tout $i \neq j$. Si de plus $\|e_i\| = 1$ pour tout i, on dit alors que celle famille est* **orthonomée** *ou* **orthonormale**.
Une **base orthonormale** *(b.o.n.) est une base dont les vecteurs forment une famille orthonormale.*

Exemple 3.15. — (a) Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique forment une famille orthonormale.

(b) Dans $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathbf{tr}({}^t AB)$, les vecteurs de la base canonique forment une famille orthonoramle.

Théorème 3.16. — *Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.*

Si cette famille est de cardinal fini n , alors elle est base d'un sous-espace vectoriel de dimension n.

Démonstration. — Soit $(e_i)_I$ une famille libre (I fini ou infini dénombrable). Si $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j = 0$ où J est une partie finie de I et $\lambda_j \in \mathbb{R}$, alors pour tout $k \in J$ on a

$$0 = \langle \sum_{j\in J} \lambda_j e_j ; e_k \rangle = \lambda_k \|e_k\|^2$$

avec $\|e_k\| \neq 0$ et nécessairement $\lambda_k = 0$. $\square$

Exemple 3.17. — La famille $\{\cos(nt), \sin(mt) \ ; \ (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*\}$ est une famille orthogonale dans l'espace des fonctions continues et 2π-periodiques sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ (voir de la feuille 3).

4. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

***Théorème 4.1* (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)**
Pour toute famille libre $(x_i)_{1\le i\le p}$ de E, il existe une unique famille orthonormée $(e_i)_{1\le i\le p}$ dans E telle que

$$\forall k \in \{1,\dots,p\}, \begin{cases} \operatorname{Vect}\{e_1,\dots,e_k\} = \operatorname{Vect}\{x_1,\dots,x_k\} \\ \langle x_k, e_k\rangle > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur $p \le 1$.

Pour $p=1$, on a nécessairement $e_1 = \lambda_1 x_1$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$ et $1 = \|e_1\|^2 = \lambda_1^2\|x_1\|^2$, donc $\lambda_1^2 = \frac{1}{\|x_1\|^2}$ ce qui donne deux solution pour λ_1. La condition supplémentaire $\langle x_1, e_1\rangle > 0$ entraîne $\lambda_1 > 0$ et on obtient ainsi l'unique solution $e_1 = \frac{1}{\|x_1\|}x_1$.

Supposons $p\ge 2$ et supposons construite la famille orthonormée $(e_i)_{1\le i\le p-1}$vérifiant les conditions

$$\forall k \in \{1,\dots,p-1\}, \operatorname{Vect}\{e_1,\dots,e_k\} = \operatorname{Vect}\{x_1,\dots,x_k\} \text{ et } \langle x_k, e_k\rangle > 0.$$

Si $(e'_1, e'_2, \dots, e'_{p-1}, e_p)$ est une solution au problème on a alors nécessairement $e'_k = e_k$ pour tout $k \in \{1,\dots,p-1\}$, car la famille $(e'_1, e'_2,\dots,e'_{p-1})$ satisfait aux conditions requises à l'ordre $p-1$. Puisque

$$\operatorname{Vect}\{e_1,\dots,e_p\} = \operatorname{Vect}\{x_1,\dots,x_p\} = \operatorname{Vect}\{e_1,\dots,e_{p-1},x_p\},$$

il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ réels tels que

$$e_p = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j e_j + \lambda_p x_p.$$

Avec les conditions d'orthogonalités $\langle e_p, e_j \rangle = 0$ pour $j = 1, \dots, p-1$, on déduit que

$$\forall j \in \{1, \dots, p-1\},\ \lambda_j + \lambda_p \langle x_p, e_j \rangle = 0$$

et

$$e_p = \lambda_p (x_p - \sum_{j=1}^{p-1} \langle x_p, e_j \rangle e_j) = \lambda_p y_p$$

où

$$y_p = x_p - \sum_{j=1}^{p-1} \langle x_p, e_j \rangle e_j.$$

Comme $x_p \notin \mathrm{Vect}\{x_1, \dots, x_{p-1}\} = \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_{p-1}\}$ on déduit que $y_p \neq 0$ et la condition $\|e_p\| = 1$ donne

$$|\lambda_p| = \frac{1}{\|y_p\|}$$

La condition supplémentaire

$$0 < \langle x_p, e_p \rangle = \langle \frac{1}{\lambda_p} (e_p - \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j e_j), e_p \rangle = \frac{1}{\lambda_p}$$

entraîne $\lambda_p > 0$, donc $\lambda_p = \frac{1}{\|y_p\|}$ et $e_p = \frac{1}{\|y_p\|} y_p$. Ceci donne une unique solution pour e_p. □

Remarque 4.2. — On peut généraliser le théorème précédent à toute famille libre infinie dénombrable $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

***Remarque 4.3* (Algorithme)**. — La construction de la famille orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ peut se faire en utlisant l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} y_1 = x_1,\ e_1 = \frac{1}{\|y_1\|} y_1 \\ y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, e_j \rangle e_j,\ e_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k \ (k = 2, \dots, p). \end{cases}$$

Le calcul de $\|y_k\|$ peut être simplifier en écrivant que

$$\begin{aligned}\|y_k\|^2 &= \langle y_k; x_k - \textstyle\sum_{j=1}^{k-1}\langle x_k, e_j\rangle e_j\rangle \\ &= \langle y_k; x_k\rangle \quad (\text{car } y_k \perp e_j \text{ pour } 1 \leq j \leq k-1) \\ &= \langle x_k - \textstyle\sum_{j=1}^{k-1}\langle x_k, e_j\rangle e_j; x_k\rangle \\ &= \|x_k\|^2 - \textstyle\sum_{j=1}^{k-1}\langle x_k; e_j\rangle^2\end{aligned}$$

Les $\langle x_k; e_j\rangle$ étant déjà calculer (pour obtenir y_k) il suffit de calculer $\|x_k\|^2$. En fait le calcul de $\langle y_k; x_k\rangle$ est souvent rapide.

Corollaire 4.4. — *Tout sous-espace vectoriel de E de dimension finie non nulle, en particulier tout espace euclidien non nul, admet une base orthonormée.*

Démonstration. — Soit F un sous-espace vectoriel de dimension n de F et soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E, donc une famille libre de E. Alors (d'après le procédé de Gram-Schmidt) il existe une famille libre $(e_1, \ldots, e_n)$ de E vérifiant les propriétés (Équation 2). Puisque

$$\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_n\} = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_n\} = F$$

la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n. de F. □

Remarque 4.5. — Si E est un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E, alors tout vecteur $x \in E$ s'ecrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x; e_i\rangle e_i.$$

Si $x, y \in E$ on peut écrire

$$\langle x; y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x; e_i\rangle\langle y; e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$$

où les x_i et y_i sont les coordonnées de x et y respectivement dans la base $\mathcal{B}$ et X et Y la matrice de x et y dans cette base. On a aussi

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x; e_i\rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Exemples 4.6. — (a) Considérons $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique $\langle x; y\rangle = \sum x_i y_i$, et considérons la base (v_1, v_2, v_3, v_4) où

$$v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,1,0,0), v_3 = (1,0,1,0), v_4 = (1,0,0,1).$$

On va utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une b.o.n. :

- $u_1 = v_1$, $\|u_1\| = \|v_1\| = 2$, donc

$$\boxed{e_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)};$$

- $u_2 = v_2 - \langle v; e_1\rangle e_1 = (1,1,0,0) - (\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\frac{1}{2}(1,1,1,1) = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$, $\|u_2\| = 1$, donc

$$\boxed{e_2 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)};$$

- $u_3 = v_3 - \langle v_3; e_1\rangle e_1 - \langle v_3; e_2\rangle e_2 = (1,0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,1,1) - 0 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$,
$\|u_3\| = 1$, donc

$$\boxed{e_3 = \frac{1}{\|u_3\|}u_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)};$$

- $u_4 = v_4 - \langle v_4; e_1\rangle e_1 - \langle v_4; e_2\rangle e_2 - \langle v_4; e_3\rangle e_3 = (1,0,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,1,1) - 0 - 0 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$,
$\|u_4\| = 1$, donc

$$\boxed{e_4 = \frac{1}{\|u_4\|}u_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)}.$$

Ainsi, la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une b.o.n. de $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.

(b) Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P; Q\rangle = \int_0^2 (2-t)P(t)Q(t)dt$$

Il s'agit bien d'un produit scalaire car l'application $t \mapsto 2-t$ est continue et à valeurs strictement positive sur $]0,2[$ (voir Exemple 1.2, (f)). On va construire une b.o.n. (P_0, P_1, P_2) en partant de la base canonique $(1, X, X^2)$ et en utilisante l'algorithme de Gram-Schmidt :

- $Q_0 = 1$,
$\|Q_0\|^2 = \int_0^2 (2-t)dt = 2$, donc

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{\|Q_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}};$$

- $Q_1 = X - \langle X; P_0\rangle P_0 = X - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 (2-t)t\frac{1}{\sqrt{2}}dt = X - \frac{2}{3}$,

$\|Q_1\|^2 = \langle Q_1; X\rangle = \int_0^2 (2-t)(t-\frac{2}{3})tdt = \frac{4}{9}$, donc

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{\|Q_1\|}Q_1 = \frac{3}{2}X - 1};$$

- $Q_2 = X^2 - \langle X^2; P_0\rangle P_0 - \langle X^2; P_1\rangle P_1 = X^2 - \frac{8}{5}X + \frac{2}{5}$,
  $\|Q_2\|^2 = \langle Q_2; X^2\rangle = \frac{8}{75}$, donc

$$\boxed{P_2 = \frac{1}{\|Q_2\|}Q_2 = \frac{\sqrt{6}}{4}(5X^2 - 8X + 2)}.$$

Ainsi, la famille de polynôme $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}X - 1, \frac{\sqrt{6}}{4}(5X^2 - 8X + 2))$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire choisi.

Compétence visée.

Savoir appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt pour déterminer une b.o.n.

5. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Soit E un espace préhilbertien réel de produit scalaire $\langle\cdot;\cdot\rangle$.

Théorème 5.1. — *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et si $x \in E$, alors il existe un unique vecteur de F, noté $p_F(x)$, tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$. On l'appelle* **projecté orthononal** *de x sur F. Dans une b.o.n. $(e_i)_{1\le i\le n}$ de F son expression est donnée par*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x; e_i\rangle e_i,$$

et on a

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x; e_i\rangle^2.$$

L'application

$$\begin{array}{rccc} p_F : & E & \to & F^\perp \\ & x & \mapsto & p_F(x) \end{array}$$

est appelée **projection orthogonale** *de E sur F. L'application*

$$\begin{array}{rcl} F & \to & \mathbb{R}^+ \\ v & \mapsto & d(x,v) := \|x-v\| \end{array}$$

admet un minimum global strict sur F, il est atteint en $p_F(x)$.
On appelle **distance** *de x au sous-espace vectoriel F le réel noté $d(x,F)$ défini par*

$$d(x,F) = \inf_{v\in F} d(x,v) = \min_{v\in F} d(x,v) = \|x - p_F(x)\|.$$

Démonstration. — Posons $\dim F = n \geq 1$ et soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une b.o.n. de F. Soit $y = \sum_{i=1}^n \lambda e_i$. On a

$$\begin{array}{rcl} x - y \in F^\perp & \iff & \langle x-y; e_j\rangle = 0,\ \forall j = 1,\dots,n \\ & \iff & \langle x; e_j\rangle = \langle y; e_j\rangle = \lambda_j, \forall j. \end{array}$$

D'où l'existence et l'unicité du vecteur y,

$$y = \sum_{i=1}^n \langle x; e_i\rangle e_i := p_F(x)$$

Le théorème de Pythagore donne alors, pour tout $v \in F$

$$\begin{array}{rl} d(x,v)^2 = \|x-v\|^2 & = \|(x - p_F(x)) + (p_F(x) - v)\|^2 \\ & = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - v\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2 \end{array}$$

Donc $d(x,v) \geq \|x - p_F(x)\|$ et on a égalité si $v = p_F(x)$. On en déduit que l'application $v \mapsto d(x,v)$ atteint son minimum en $v = p_F(x)$. □

Exemples 5.2. — (a) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P; Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

L'application $(P,Q) \mapsto \langle P; Q\rangle$ est bien définie puisque (récurrence) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k!$. On vérifie ensuite facilement qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
On souhaite calculer la distance $d(P, \mathbb{R}_2[X])$ du polynôme $P = 1+X+X^3$ au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
On commence par construire une b.o.n. de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot;\cdot\rangle$. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt sur la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, on a

- $Q_0 = 1$, $\|Q_0\|^2 = 1$, donc $P_0 = \frac{1}{\|Q_0\|}Q_0 = 1$;
- $Q_1 = X - \langle X; P_0\rangle P_0 = X - 1$, $\|Q_1\|^2 = 1$, donc $P_1 = \frac{1}{\|Q_1\|}Q_1 = X - 1$;

• $Q_2 = X^2 - \langle X^2; P_0\rangle P_0 - \langle X^2; P_1\rangle P_1 = X^2 - 4X + 2$, $\|Q_2\|^2 = 4$, donc $P_2 = \frac{1}{\|Q_2\|} Q_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 4X + 2)$;

• $Q_3 = X^3 - \langle X^3; P_0\rangle P_0 - \langle X^3; P_1\rangle P_1 - \langle X^3; P_2\rangle P_2 = X^3 - 9X^2 + 18X - 6$, $\|Q_3\|^2 = 36$, donc $P_3 = \frac{1}{\|Q_3\|} Q_3 = \frac{1}{6}(X^3 - 9X^2 + 18X - 6)$

Ainsi (P_0, P_1, P_2, P_3) est une b.o.n. de $\mathbb{R}_3[X]$ et (P_0, P_1, P_2) est une b.o.n. de $\mathbb{R}_2[X]$.

Si Q est la projection orthogonale du polynôme $P = 1 + X + X^3$ sur $\mathbb{R}_2[X]$, alors

$$Q = \sum_{k=0}^{2} \langle P; P_k\rangle P_k$$

Or le polynôme P s'écrit lui aussi dans la b.o.n. (P_0, P_1, P_2, P_3)

$$P = \sum_{k=0}^{3} \langle P; P_k\rangle P_k = \sum_{k=0}^{2} \langle P; P_k\rangle P_k + \langle P; P_3\rangle P_3 = Q + \langle P; P_3\rangle P_3$$

Le coefficient $\langle P; P_3\rangle$ peut s'obtenir en identifiant les coefficients de X^3, soit

$$\langle P; P_3\rangle = 6.$$

Donc

$$Q = P - \langle P; P_3\rangle P_3 = 9x^2 - 17X + 7,$$

et

$$d(P, \mathbb{R}_2[X]) = \|P - Q\| = \|\langle P; P_3\rangle P_3\| = |\langle P; P_3\rangle| \|P_3\| = \langle P; P_3\rangle = 6.$$

(b) On cherche à calculer

$$M = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (x^2 - ax - b)^2 dx.$$

Pour cela nous allons interpreter M comme étant la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien bien choisi.

On considère $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f; g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

On a alors

$$\begin{aligned} M &= \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \textstyle\int_{-1}^{1} (x^2 - ax - b)^2 dx \\ &= \inf_{Q\in\mathbb{R}_1[x]} \|f - Q\|^2 \\ &= d(f, \mathbb{R}_1[x])^2 \\ &= \|f - p_{\mathbb{R}_1[x])}(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|p_{\mathbb{R}_1[x])}(f)\|^2 \end{aligned}$$

où $f(x) = x^2$ et $\mathbb{R}_1[x] = \{Q : x \mapsto ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ sous-espace vectoriel de dimension 2 de E.

En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, x)$ de $\mathbb{R}_1[x]$) on trouve la b.o.n. $(P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, P_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x)$. On a alors

$$p_{\mathbb{R}_1[x])}(f) = \langle f; P_0\rangle P_0 + \langle f; P_1\rangle P_1$$

avec $\langle f; P_0\rangle = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\langle f; P_1\rangle = 0$ donc $p_{\mathbb{R}_1[x])}(f) = \frac{1}{3}$, d'où

$$M = \|f\|^2 - \|p_{\mathbb{R}_1[x])}(f)\|^2 = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

Compétence visée.

Savoir calculer la projection orthogonale d'une vecteur $x \in E$ sur un sous-espace vectoriel de dimension finie F et calculer la distance $d(x, F)$. Savoir calculer des infimums comme dans l'exemple 5.2

Corollaire 5.3. — *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$.*

Démonstration. — Pour tout $x \in F \cap F^{\perp}$, on a $\|x\|^2 = \langle x; x\rangle = 0$, donc $x = 0$ et $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.
Pour tout $x \in E$, on a $x = p_F(x) + (x - p_F(x)) \in F + F^{\perp}$, donc $E = F + F^{\perp}$. □

Remarque 5.4. — (a) Si E est un espace euclidien et si F est un sous-espace vectoriel de E, on a $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$. Donc $\dim(F^{\perp})^{\perp} = \dim F$. Or $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$, d'où $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

(b) Si F est de dimension infinie, on a toujours $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ mais pas nécessairement $E = F \oplus F^{\perp}$: on considère par exemple $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni du produit scalaire $\langle f; g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Si $F = \mathbb{R}[x]$, alors (théorème de Weierstrass) $F^{\perp} = \{0\}$ et $E \neq F \oplus F^{\perp}$.

Proposition 5.5. — *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension n de E et p_F la projection orthogonale sur F. Alors*

(a) Pour $x \in E$, on a $x \in F \iff p_F(x) = x$.

(b) p_F est une application linéaire surjective ;

(c) p_F est un projecteur d'image F, c-à-d., $p_F \circ p_F = p_F$. De plus $\mathbf{Im}\, p_F = F$ *et* $\mathbf{Ker}\, p_F = F^{\perp}$ *;*

(d) Si E est de dimension finie, on a $p_F + p_{F^\perp} = Id$;
(e) Si E est de dimension finie, on a $p_F \circ p_{F^\perp} = p_{F^\perp} \circ p_F = 0$;
(f) p_F est lipschitzienne de rapport 1, $\forall x \in E$, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

Démonstration. — (a) Si $x = p_F(x)$, alors $x \in F$. Réciproquement, soit $x \in F$, comme $x - x = 0 \in F^\perp$, alors $p_F(x) = x$.

(b) Comme $p_F(x) = x$ pour tout $x \in F$, on a $p_F \circ p_F = p_F$.
Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une b.o.n. de F, alors $\forall x \in E$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x; e_i\rangle e_i$, d'où la linéarité de p_F.

(c) L'égalité $p_F(x) = x$ pour tout $x \in F$ entraîne que p_F est surjective et que $\mathbf{Im}\, p_F = F$.
Soit $x \in \mathbf{Ker}\, p_F$, on a $p_F(x) = 0$ et $x = x - p_F(x) \in F^\perp$. Réciproquement, si $x = x - 0 \in F^\perp$, alors $p_F(x) = 0$. Donc $\mathbf{Ker}\, p_F = F^\perp$.

(d) Dans $E = F \oplus F^\perp$, on a les deux écritures

$$x = [x - p_F(x)] + p_F(x) = [x - p_{F\perp}(x)] + p_{F\perp}(x).$$

Comme $p_F(x), x - p_{F^\perp}(x) \in F$ et $x - p_F(x), p_{F^\perp} \in F^\perp$, on a d'après l'unicité de l'écriture que $x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x)$, donc $p_{F^\perp}(x) + p_F(x) = x$.

(e) On déduit du point précédent que $p_F(x - p_{F^\perp}(x)) = p_F(p_F(x)) = p_F(x)$, donc $p_F(p_{F^\perp}(x)) = 0$. L'égalité $p_{F^\perp} \circ p_F = 0$ se montre de manière analogue.

(f) Pour tout $x \in E$, $0 \leq d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$, donc $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$. □

Remarque 5.6. — Si $D = \mathbb{R}a$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de E (une droite vectorielle) où $a \in E$, alors

$$\forall x \in E,\ p_D(x) = \frac{\langle x; a\rangle}{\|a\|^2} a,$$

puisque une base orthonormée de D est $(\frac{1}{\|a\|} a)$.

Si H est un hyperplan de E, alors $H = (\mathbb{R}a)^\perp$ ou $a \in E$, alors puisque $p_{\mathbb{R}a} + p_{(\mathbb{R}a)^\perp} = Id$,

$$\forall x \in E,\ p_H(x) = x - \frac{\langle x; a\rangle}{\|a\|^2} a.$$

Definition 5.7. — Supposons que E est un espace vectoriel euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension d. La **symétrie orthogonale** par rapport à F est l'application définie sur E par

$$s_F(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x)$$

Remarques 5.8. — (a) Puisque p_F et $p_{F^\perp}$ sont linéaires, s_F est linéaire.
(b) Si $F = \{0\}$, alors $s_F = -Id$ et si $F = E$, alors $s_F = Id$.
(c) De $p_{\mathbb{R}a} + p_{(\mathbb{R}a)^\perp} = Id$, on déduit que

$$\forall x \in E,\ s_F(x) = 2p_F(x) - x = x - 2p_{F^\perp}(x).$$

(d) Si $F = D = \mathbb{R}a$ est une droite vectorielle, alors

$$\forall x \in E,\ s_D(x) = 2p_D(x) - x = 2\frac{\langle x; a\rangle}{\|a\|^2}a - x.$$

(e) Si $F = H = D^\perp = (\mathbb{R}a)^\perp$ est un hyperplan de E, alors

$$\forall x \in E,\ s_H(x) = 2p_H(x) - x = x - 2\frac{\langle x; a\rangle}{\|a\|^2}a.$$

Proposition 5.9. — *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. On a*
(a) Pour $x \in E$, $x \in F \iff s_F(x) = x$ et $x \in F^\perp \iff s_F(x) = -x$.
(b) $s_F \circ s_F = Id$ (s_F est une involution).
(c) $s_F + s_{F^\perp} = 0$ et $s_F \circ s_{F^\perp} = s_{F^\perp} \circ s_F = -Id$.

Démonstration. — (a) Soit $x \in E$, on a $x \in F \iff p_F(x) = x \iff s_F(x) = x$ et $x \in F^\perp \iff p_{F^\perp}(x) = x \iff s_F(x) = -x$.
(b) On a

$$\begin{aligned} s_F \circ s_F &= (p_F - p_{F^\perp}) \circ (p_F - p_{F^\perp}) \\ &= p_F \circ p_F - p_{F^\perp} \circ p_F - p_F \circ p_{F^\perp} + p_{F^\perp} \circ p_{F^\perp} \\ &= p_F + p_{F^\perp} = Id. \end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned} s_F + s_{F^\perp} &= (p_F - p_{F^\perp}) + (p_{F^\perp} - p_F), \quad (\text{car } (F^\perp)^\perp = F) \\ &= 0; \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s_F \circ s_{F^\perp} &= (p_F - p_{F^\perp}) \circ (p_{F^\perp} - p_F) \\ &= p_F \circ p_{F^\perp} - p_{F^\perp} \circ p_{F^\perp} - p_F \circ p_F - p_{F^\perp} \circ p_F \\ &= -p_F - p_{F^\perp} = -Id. \end{aligned}$$

□

Compétence visée.

Savoir déterminer la projection orthogonale sur un s.e.v. F, symétrie orthogonale par rapport à un s.e.v. F.

Théorème 5.10 **(Inégalité de Bessel).** — *Si* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une famille orthonormale de* E*. Alors pour tout* $x \in E$*, on a*

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x; e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration. — Soit $F = \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$. C'est un sous-espace vectoriel de dimension n de E et $(e_1, \dots, e_n)$ en est une b.o.n. Pour tout $x \in E$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x; e_i \rangle e_i$ et

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x; e_i \rangle^2 = \|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

d'après la proposition 5.5. □

Corollaire 5.11. — *Soit* $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *une famille orthonormale infinie dénombrable de* E*. Alors pour tout* $x \in E$*, on a*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x; e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration. — D'après la proposition 5.10, pour toute partie finie $J \subset \mathbb{N}$, on a $\sum_{I \in J} \langle x; e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$. Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x; e_i \rangle^2$ est convergente et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x; e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$. □

6. Orientation d'un espace vectoriel euclidien

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors on note $\mathbf{det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
On a alors $\mathbf{det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ et $\mathbf{det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ sont non nuls et inverse l'un de l'autre. Ils sont donc tous les deux strictement positifs ou tous les deux strictement négatifs.

On définit alors une relation sur l'ensemble des bases de E

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B} \iff \mathbf{det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0.$$

Proposition 6.1. — *La relation* $\sim$ *est une relation d'équivalence et il y a exactement deux classes d'équivalences pour cette relation.*

Démonstration. — La relation est évidemment reflexive, puisque $\mathbf{det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathbf{det}\, I_n = 1 > 0$
La relation est symétrique puisque si $\mathbf{det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$, alors $\mathbf{det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) =$

$\frac{1}{\mathbf{det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')} > 0$.
La relation est transitive puisque si $\mathbf{det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ et $\mathbf{det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') > 0$ alors $\mathbf{det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \mathbf{det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\,\mathbf{det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') > 0$.

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E fixée. Pour tout autre base $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\leq i\leq n}$ de E, en désignant par $P = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a soit $\mathbf{det}\, P > 0$ soit $\mathbf{det}\, P < 0$.

– Si $\mathbf{det}\, P > 0$, alors $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est dans la classe de $\mathcal{B}$.

– Si $\mathbf{det}\, P < 0$, alors on considère la base $\mathcal{B}^- = (e_1, \ldots, e_{n-1}, -e_n)$. La matrice de passage de $\mathcal{B}^-$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P^- = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & & \ddots & a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{det}\, P^- = -\mathbf{det}\, P > 0$, donc $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}^-$ et $\mathcal{B}'$ est dans la classe de $\mathcal{B}^-$. □

Definition 6.2. — **Orienter** *un espace vectoriel E revient à choisir une base $\mathcal{B}_0$ de E.*
On dit qu'une base $\mathcal{B}$ est **directe** *(ou qu'elle définit la même orientation que $\mathcal{B}_0$) si $\mathcal{B}$ est dans la classe d'équivalence de $\mathcal{B}_0$, c-à-d.* $\mathbf{det}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$ *et on dit que cette base est* **indirecte** *dans le cas contraire, c-à-d.* $\mathbf{det}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$.

La proposition précédente nous dit qu'il n'y a que deux orientations possibles pour E.

Proposition 6.3. — *Un espace vectoriel euclidien orienté admet une base orthonormée directe.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une b.o.n. de E. Si $\mathcal{B}$ est directe alors c'est une b.o.n. directe. Sinon $\mathcal{B}$ est indirecte et (d'après la démonstration de la proposition 6.1) la base $\mathcal{B}^- = (e_1, \ldots, e_{n-1}, -e_n)$ est une b.o.n. directe. □

Exemple 6.4. — (a) On peut orienter le plan euclidien par le choix d'une b.o.n. $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ tel qu'on tourne $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ dans le sens trigonométrique. Les base $(-\vec{i}, -\vec{j})$, $(\vec{j}, -\vec{i})$ et $(-\vec{j}, \vec{i})$ sont directes, alors que les bases $(-\vec{i}, \vec{j})$, $(\vec{i}, -\vec{j})$, $(\vec{j}, \vec{i})$ et $(-\vec{j}, -\vec{i})$ sont indirectes.

(b) L'espace euclidien de dimension 3 peut être orienté par le choix de la b.o.n. $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ satisfaisant à la règle du *bonhomme d'Ampère*. Les bases $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$, $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ sont directes, alors que les bases $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$, $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ et $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ sont indirectes.

(c) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n. directe d'un espace vectoriel euclidien orienté et si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, la b.o.n. $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ est directe si, et seulement si $\varepsilon(\sigma) = 1$ (Voir Feuille 4).

Proposition 6.5. — *Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n et H un hyperplan de E de vecteur normal unitaire a, $H = (\mathbb{R}a)^\perp$. Il existe une unique orientation de H telle que pour toute b.o.n. directe $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de H, la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, a)$ est une b.o.n. directe de E.*
On dira alors que l'hyperplan H est orienté par le vecteur normal a.

Démonstration. — Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ une b.o.n. de H.
Unicité : Les deux bases

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \quad \text{et} \quad (-\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1})$$

définissent les deux orientations de H, et parmi les deux b.o.n. de E

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}, a) \quad \text{et} \quad (-\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}, a)$$

il n'y en a qu'une qui soit directe.

Existence : Orientons H par $\mathcal{B}'_0 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$. Quite à changer ε_1 en $-\varepsilon_1$, on peut supposer $\mathcal{B}_0 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, a)$ directe. Soit $\mathcal{B}' = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ une b.o.n. directe de H. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-1}, a)$ est une b.o.n. de E. Soit P' la matrice de passage de $\mathcal{B}'_0$ à $\mathcal{B}'$, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathbf{det}\, P' > 0$, on a $\mathbf{det}\, P > 0$ et par suite $\mathcal{B}$ est directe. □

Exemple 6.6. — Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, l'orientation d'une droite définit une orientation de son plan perpendiculaire.

7. Produit mixte, produit vectoriel

On va admettre le théorème suivant. Il sera considéré dans le chapitre suivant.

Théorème 7.1. — *Soit E un espace vectoriel euclidien et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux b.o.n. Alors le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est égal à ± 1.*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 3$ orienté par le choix d'une b.o.n. $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$.

Si $\mathcal{B}$ est une autre base de E, alors pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de vecteurs de E, on a

$$\mathbf{det}_{\mathcal{B}_0}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{det}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})\mathbf{det}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Il en résulte que si $\mathcal{B}$ est une b.o.n. directe, la quantité $\mathbf{det}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ne depends pas de $\mathcal{B}$ puisque $\mathbf{det}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = 1$. On la note $\mathbf{det}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ et on dira que c'est le **produit mixte** des vecteurs ordonnés $x_1, x_2, \dots, x_n$.

En remarquant que pour tout $(n-1)$-uplet $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ de vecteurs de E, l'application

$$x \mapsto [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x]$$

est une forme linéaire de E. On déduit de la Proposition 3.11 du Chapitre 3 qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x] = \langle a; x \rangle. \tag{3}$$

ce vecteur a étant fonction des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Definition 7.2. — *Le* **produit vectoriel** *des $n-1$ vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ de E est le vecteur a définit par (Équation 3). On le note $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$.*

Soit une b.o.n. $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Pour tout j compris entre 1 et $n-1$, les réels

$$\mathbf{det}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, e_i) = \langle x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}; e_i \rangle$$

sont les composantes du vecteur $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ dans la base $\mathcal{B}_0$. On a donc

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \Delta_i e_i$$

où Δ_i est le déterminant d'ordre $n-1$ déduit de $\mathbf{det}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, e_i)$ en supprimant la i-ème ligne i et la n-ème colonne.

$(-1)^{i+n}\Delta_i$ est aussi le cofacteur d'indice (i, n) de la matrice des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, e_i$ dans la base $\mathcal{B}_0$.

En utilisant les propriétés du déterminant, on obtient le résultat suivant

Théorème 7.3. — *(a) Le produit vectoriel est une application $(n-1)$-linéaire alternée de E^{n-1} dans E.*

(b) Le vecteur $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ est orthogonal à tous les vecteurs x_i, pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

(c) On a $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = 0_E$ si, et seulement si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ est liée.

(d) Si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ est libre, alors

$$\mathbf{det}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}) = \|x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}\|^2 > 0.$$

et la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1})$ est une base directe de E.

(e) Si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ est orthonormée, alors la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1})$ est une b.o.n. directe de E.

Démonstration. — (a) Puisque chaque application

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \mathbf{det}((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, e_i)$$

est $(n-1)$-linéaire, l'application $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ est $(n-1)$-linéaire.

(b) Comme, pour tout $1 \leq i \leq n-1$,

$$\langle x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}; x_i\rangle = \mathbf{det}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_i) = 0.$$

le vecteur $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ est orthogonal à x_i.

(c) Si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ est liée, il en est de même de la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x)$ pour tout $x \in E$ et

$$\langle x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}; x\rangle = \mathbf{det}((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x) = 0,$$

donc $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \in E^\perp = \{0_E\}$.

Si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ est libre, on peut la compléter en une base $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x)$ et

$$\langle x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}; x\rangle = \mathbf{det}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x) \neq 0,$$

ce qui entraîne que $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \neq 0_E$.

(d) Si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ est libre, on a $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \neq 0_E$, donc

$$\mathbf{det}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}) = \|x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}\|^2 \neq 0$$

et $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1})$ est une base directe de E.

(e) Si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ est orthonormée, alors elle est libre et $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1})$ est une b.o.n. directe de E. De plus $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ est orthogonal à l'hyperplan H engendré par $x_1, \dots, x_{n-1}$.
On complète $(x_1, \dots, x_{n-1})$ en une b.o.n. directe de E, $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, où $x_n \in H^\perp$ et $\|x_n\| = 1$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = \lambda x_n$ et

$$\lambda = \langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}; x_n \rangle = \mathbf{det}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 1$$

donc $\lambda = 1$ et $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = x_n$. □

De la Remarque 5.6 du Chapitre 3, en utilisant le produit vectoriel, on a :

Théorème 7.4. — *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et soit H un hyperplan de E et $(x_1, \dots, x_{n-1})$ une base de H. Alors la droite $D = H^\perp$ est dirigée par le vecteur $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ et pour tout $x \in E$, la projection orthogonal de x sur H est donnée par*

$$p_H(x) = x - \frac{\langle x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}; x \rangle}{\|x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}\|^2}(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}),$$

et la distance de x à H est

$$d(x, H) = \frac{|\langle x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}; x \rangle|}{\|x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}\|} = \frac{|\,\mathbf{det}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}; x)|}{\|x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}\|}.$$

Remarques 7.5. — (a) Le théorème précédent nous dit aussi qu'une équation de l'hyperplan H de base $(x_1, \dots, x_{n-1})$ est donnée par

$$x \in H \iff d(x, H) = 0 \iff \langle x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}; x \rangle = 0.$$

(b) En supposant $(x_1, \dots, x_{n-1})$ une b.o.n. de H, on a

$$p_H(x) = x - \langle x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}; x \rangle (x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}),$$

et

$$d(x, H) = |\langle x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}; x \rangle|.$$

8. Produit vectoriel en dimension 3

On suppose ici que E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté par le choix d'une b.o.n. $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$.

Soient $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ deux vecteurs de E et notons $x \wedge y = z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$. On a alors

$$\begin{aligned}
z_1 &= \langle x \wedge y; e_1\rangle = \mathbf{det}(x, y, e_1) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2y_3 - x_3y_2 \\
z_2 &= \langle x \wedge y; e_2\rangle = \mathbf{det}(x, y, e_2) = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_3y_1 - x_1y_3 \\
z_3 &= \langle x \wedge y; e_3\rangle = \mathbf{det}(x, y, e_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.
\end{aligned}$$

D'où la règle de calcul de produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 8.1. — *Soit (f_1, f_2, f_3) une b.o.n. directe de E, alors on a*

$$f_1 \wedge f_2 = f_3, \quad f_2 \wedge f_3 = f_1, \quad f_3 \wedge f_1 = f_2.$$

Démonstration. — Voir Feuille 4. □

Remarque 8.2. — (a) Puisque l'application $(x, y) \mapsto x \wedge y$ est bilinéaire alternée, on a pour tout $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$

(1) $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$;

(2) $x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z$;

(3) $(\lambda x) \wedge y = x \wedge (\lambda y) = \lambda(x \wedge y)$;

(4) $x \wedge y = -(y \wedge x)$.

(b) Le produit vectoriel n'est pas commutatif, puisque si (x, y) est libre, on a $x \wedge y = -(y \wedge x) \neq y \wedge x$.

(c) Le produit vectoriel n'est pas associatif, car $e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3 = -e_2 \neq 0_E$ et $(e_1 \wedge e_1) \wedge e_2 = 0_E \wedge e_2 = 0_E$.

Proposition 8.3. — *Pour tout $x, y, z \in E$, on a*

$$\begin{aligned}
x \wedge (y \wedge z) &= \langle x; z\rangle y - \langle x; y\rangle z; \\
(x \wedge y) \wedge z &= \langle x; z\rangle y - \langle y; z\rangle x.
\end{aligned}$$

Démonstration. — Voir Feuille 4. □

---

version 1, 3 avril 2018