CHAPITRE 2
FORMES BILINÉAIRES SYMÉTRIQUES ET FORMES QUADRATIQUES

Table des matières

1. Formes bilinéaires symétriques

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique 0 et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Definition 1.1. — *Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une* **forme bilinéaire** *sur E si*
(a) $\forall y \in E$, $\varphi_y : x \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E.
On dira aussi que φ est linéaire par rapport à la première place.
(b) $\forall x \in E$, $\varphi_x : y \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E.
On dira aussi que φ est linéaire par rapport à la deuxième place.

Soient φ est une forme bilinéaire sur E, $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{K}$, $x_1, \dots, x_n \in E$ et $y_1, \dots, y_m \in E$. Alors

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j). \tag{1}$$

Definition 1.2. — *(a) On appelle* **forme bilinéaire symétrique** *sur E toute forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant*

$$\forall x, y \in E, \ \ \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

(b) On appelle **forme bilinéaire antisymétrique** *sur E toute forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant*

$$\forall x, y \in E, \ \ \varphi(x, y) = -\varphi(y, x).$$

(c) On appelle **forme bilinéaire alternée** *sur E toute forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant*

$$\forall x \in E, \ \ \varphi(x, x) = 0$$

Remarque 1.3. — (a) Une forme bilinéaire est alternée si, et seulement si, elle est antisymétrique.

(b) Dorénavant, on abrégera forme bilinéaire symétrique en **fbs**.

(c) Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une fbs si, et seulement si, φ est symétrique et linéaire par rapport à la première (ou la deuxième) place.

(d) Si φ est une fbs sur E, alors $\forall x \in E$, $\varphi(x, 0) = \varphi(0, x) = 0$.

Exemples 1.4. — (a) Sur $E = \mathbb{R}^n$, pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, l'application

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$$

est une fbs.

(a) Si $\ell_1, \ell_2 \in E^*$, alors l'application

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\ell_1(x)\ell_2(y) + \ell_2(x)\ell_1(y))$$

est une fbs sur E.

(c) Sur $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, l'application

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est une fbs.

(d) Sur $E = M_{n,n}(\mathbb{R})$, l'application

$$\varphi(A, B) = \mathbf{tr}(AB)$$

est une fbs.

On note $\mathcal{BL}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E. On notera aussi $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des fbs sur E.

Proposition 1.5. — *(a) L'ensemble $\mathcal{BL}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E \times E, \mathbb{K})$.*

(b) L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{BL}(E)$.

Démonstration. — Immédiat.

□

2. Forme quadratiques

Definition 2.1. — *On appelle* **forme quadratique** *sur E toute application $q : E \to \mathbb{K}$ de la forme*

$$q : x \mapsto \varphi(x,x)$$

où φ est une forme bilinéaire sur E. Dans ce cas, on dira que q est la forme quadratique associée à φ.

Remarque 2.2. — A priori, il n'y a pas unicité des formes bilinéaires associées à une forme quadratique. Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, les formes bilinéaires $\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$ et $\psi(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ définissent la même forme quadratique $q(x) = \varphi(x,x) = x_1^2 + x_2^2 = \psi(x,x)$.

L'unicité de φ est assurée par le résultat suivant :

Théorème 2.3. — *Si q est une forme quadratique sur E, alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. — La forme quadratique q est définie par $q(x) = \varphi_0(x,x)$ pour $x \in E$ où φ_0 est une forme bilinéaire sur E (qui n'est pas forcement symétrique). L'application φ définie sur $E \times E$ par

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[\varphi_0(x,y) + \varphi_0(y,x)]$$

est bilinéaire et symétrique avec $\varphi(x,x) = q(x)$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve l'existence de φ.
Comme φ est bilinéaire symétrique, on a pour tout $x, y \in E$

$$q(x+y) = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y)$$

de sorte que

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] \tag{2}$$

ce qui prouve l'unicité. □

Proposition 2.4. — *Soit q une forme quadratique sur E et φ la forme bilinéaire symétrique associée. On a*

(a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.
(b) $\forall x, y \in E$, $q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y)$.
(c) $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$.
(d) $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x) + q(y) - q(x-y)\right]$.
(e) $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x-y)\right]$.

Démonstration. — Il suffit d'expliciter le calcul de $q(x+\lambda y) = \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y)$ en tenant compte de la bilinéarité et de la symétrie de φ.

$$\begin{aligned} q(x+\lambda y) &= \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) \\ &= \varphi(x,x) + \lambda\varphi(x,y) + \lambda\varphi(y,x) + \lambda^2\varphi(y,y) \\ &= \varphi(x,x) + 2\lambda\varphi(x,y) + \lambda^2\varphi(y,y). \end{aligned}$$

Tous les points (de (a) à (e)) se déduise de cette dernière formule. □

Definition 2.5. — *Toute fq q sur E est associée à une unique fbs φ sur E appelée* **forme polaire** *de q et définie par (c), (d) ou (e) de la proposition 2.4.*

Exemple 2.6. — (a) Pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, l'application

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de forme polaire associée

$$(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i.$$

(b) Soient $\ell_1, \ell_2 \in E^*$, l'application

$$x \mapsto \ell_1(x)\ell_2(x)$$

est une forme quadratique sur E de forme polaire associée

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(\ell_1(x)\ell_2(y) + \ell_1(y)\ell_2(x)).$$

En particulier, si $\ell \in E^*$, l'application

$$x \mapsto \ell(x)^2$$

est une forme quadratique sur E et sa forme polaire est

$$(x, y) \mapsto \ell(x)\ell(y).$$

(c) L'application

$$q : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto \int_0^1 P(t)P''(t)dt$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$ et sa forme polaire

$$(P, Q) \mapsto \frac{1}{2}\int_0^1 (P(t)Q''(t) + P''(t)Q(t))dt.$$

Proposition 2.7. — *L'ensemble, $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$.*

Proposition 2.8. — *L'application $\varphi \mapsto q_\varphi$, qui à toute fbs associe la forme quadratique associée, est un isomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ sur $\mathcal{Q}(E)$.*

Démonstration. — Il est claire que $\varphi \mapsto q_\varphi$ est une bijection de $\mathcal{S}(E)$ sur $\mathcal{Q}(E)$. On vérifie aisément que $q_{\varphi+\lambda\phi} = q_\varphi + \lambda q_\phi$. □

Corollaire 2.9. — *Soient $\ell_1, \ldots, \ell_r$ des formes linéaires sur E et $a_1, \ldots, a_r$ des scalaires. Alors $x \mapsto \sum_{i=1}^r a_i\ell_i(x)^2$ est une forme quadratique sur E de forme polaire $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^r a_i\ell_i(x)\ell_i(y)$.*

Démonstration. — Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $x \mapsto \ell_i(x)^2$ est une forme quadratique admettant pour forme polaire la fbs $(x, y) \mapsto \ell_i(x)\ell_i(y)$. La linéarité de $\varphi \mapsto q_\varphi$ permet de conclure. □

3. Forme positive et définies positives

Dans ce paragraphe, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soit φ une fbs sur E et q la forme quadratique associée.

Definition 3.1. — *(a) On dit que φ, ou q est* **positive**, *si elle vérifie*

$$\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geq 0.$$

(b) On dit que φ, ou q est **définie positive**, *si elle vérifie*

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ \varphi(x, x) > 0.$$

On note :
$\mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ les ensembles des fbs respectivement positives et définies positives.
$\mathcal{Q}^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}^{++}(\mathbb{R})$ les ensembles des fq respectivement positives et définies positives.

Remarque 3.2. — a) φ est définie positive si, et seulement si, elle est positive et si $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
(b) Les ensembles $\mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ils sont évidemment stables par combinaisons linéaires à coefficients positifs. On dit que ce sont des **cônes convexes**.
De même $\mathcal{Q}^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}^{++}(\mathbb{R})$ sont des cônes convexes.

Exemple 3.3. — (a) La fbs sur $\mathbb{R}^n$

$$(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est définie positive.
(b) Si $E = \mathcal{CM}([0,1],\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$, alors la fbs

$$(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est positive, mais non définie positive. Sa restriction à $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, est définie positive.
(c) La fbs sur $M_n(\mathbb{R})$

$$(A,B) \mapsto \mathbf{tr}({}^tAB)$$

est définie positive.

Théorème 3.4 **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)**
Soit φ une fbs positive sur E et q la forme quadratique associée. Alors

$$\forall x,y \in E, \quad [\varphi(x,y)]^2 \leq q(x)q(y).$$

Dans le cas où φ est définie positive, on a égalité si, et seulement si, (x,y) est une famille liée dans E.

Démonstration. — Soit $(x,y) \in E^2$. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
$0 \leq P(\lambda) := q(x+\lambda y) = q(x) + 2\lambda\varphi(x,y) + \lambda^2 q(y)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 dont les valeurs sont positives.

• si $q(y) \neq 0$, alors $q(y) > 0$ et le discriminant réduit du trinôme $P(\lambda)$ est $(\varphi(x, y))^2 - q(x)q(y) \leq 0$. D'où le résultat.

• si $q(y) = 0$, on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = 2\lambda\varphi(x, y) + q(x) \geq 0$. Si $\varphi(x, y) \neq 0$, alors $\lambda \mapsto P(\lambda)$ est une fonction polynomiale de degré un et donc change de signe, d'où $\varphi(x, y) = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

Supposons que φ est définie positive. Si les deux vecteurs x, y sont liés, alors $x = \alpha y$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ donc

$$\varphi(x, y)^2 = \alpha^2\varphi(x, x)^2 = \alpha^2 q(x)^2 = q(x)q(\alpha x) = q(x)q(y).$$

Réciproquement, si $\varphi(x, y)^2 = q(x)q(y)$, alors dans le cas où $q(y) = 0$, on a $y = 0$ et (x, y) est liée ; dans le cas où $q(y) \neq 0$, on a la fonction polynomiale $P(\lambda)$ a un discriminant nul, d'où l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda_0) = 0$. Comme $P(\lambda_0) = q(x + \lambda_0 y)$, $x + \lambda_0 y = 0$ puisque φ est définie positive.

□

Compétence visée.

Savoir vérifier qu'une application est une forme bilinéaire (positive, définie positive).

4. Formes bilinéaires symétriques en dimension finie : matrice d'une forme bilinéaire symétrique

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soit φ une forme bilinéaire symétrique et q la forme quadratique associée.

Théorème et définition 4.1. — *(a) On appelle matrice de φ, ou de q, dans la base $\mathcal{B}$, la matrice symétrique*

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$$

On a alors

$$\varphi(x, y) = {}^t\!XAY = {}^t\!YAX. \tag{3}$$

où X et Y sont les matrices colonnes des coordonnées respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$.

(b) Pour toute matrice symétrique $A \in M_n(\mathbb{K})$, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur $\mathbb{K}^n$ dont A est la matrice. Plus précisément, φ est donnée par la relation (3).

Démonstration. — (a) Soient $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ deux vecteurs de E exprimés dans la base $\mathcal{B}$. De la linéarité de φ on déduit

$$\varphi(x,y) = \varphi(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi(e_i, e_j) x_i y_j$$

On pose $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$ les vecteurs colonnes de x et y. Alors, il est clair que

$$^tXAY = {}^tYAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \varphi(x,y).$$

(b) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice symétrique. $M_{n,1}(\mathbb{K})$ étant identifié à $\mathbb{K}^n$. On vérifie facilement que $\varphi : (X,Y) \mapsto {}^tXAY$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{K}^n$ □

Remarque 4.2. — (a) On retiendra l'expression, dans une base $\mathcal{B} = (e_i)$ donnée, d'une forme bilinéaire symétrique

$$\varphi(x,y) = {}^tXAY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

où $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$, $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$. La forme quadratique associée a pour expression analytique dans $\mathcal{B}$

$$q(x) = {}^tXAX = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

qui est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées (x_i) du vecteur x. On retrouve alors :

- les termes diagonaux a_{ii} de la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ comme coefficients des termes x_i^2.
- les termes rectangles a_{ij} comme demi-coefficients des termes $x_i x_j$ avec $i < j$.

(b) On peut définir la matrice, dans une base $\mathcal{B} = (e_i)$ donnée, de toute forme bilinéaire φ (non nécessairement symétrique) par la même formule

$$\varphi(x,y) = {}^tXAY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j.$$

Dans ce cas la matrice $A = (a_{ij})$ est symétrique (respectivement anti-symétrique) si, et seulement si, la forme bilinéaire φ est symétrique (respectivement alternée).

Théorème 4.3. — *Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire (respectivement symétrique) sur E si, et seulement si, il existe une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ (respectivement symétrique) et des formes linéaires $\ell_1, \ldots, \ell_n \in E^*$ linéairement indépendantes telles que*

$$\forall x, y \in E, \;\; \varphi(x, y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \ell_i(x) \ell_j(y).$$

Démonstration. — Si φ est bilinéaire, on a dans une base $\mathcal{B} = (e_i)$, pour tout $x, y \in E$

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \ell_i(x) \ell_j(y)$$

où $(\ell_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base duale de $\mathcal{B}$: $\ell_i(x) = x_i$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$. De plus la matrice $A = (a_{ij})$ est symétrique si, et seulement si, φ est symétrique.
La réciproque est immédiate. □

Proposition 4.4. — *(a) L'application qui associe à une forme bilinéaire sa matrice dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{BL}(E)$ sur l'espace $M_n(\mathbb{K})$ des matrices $n \times n$.*

(b) L'application qui associe à une forme bilinéaire symétrique (respectivement quadratique) sa matrice dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ (respectivement $\mathcal{Q}(E)$) sur l'espace $\mathrm{Sym(n, \mathbb{K})}$ *des matrices symétriques.*

Démonstration. — On va montrer (b), la propriété (a) se démontre de la même façon.
(b) Soit $\Phi : \mathcal{S}(E) \to \mathrm{Sym(n, \mathbb{K})}, \varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ cette application. Il est claire que Φ est linéaire. De plus, si $\varphi \in \mathbf{Ker}(\Phi)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = 0$ et par suite $\varphi = 0$ et donc Φ est injective. D'autre part, si $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Sym(n, \mathbb{K})}$, il est claire que

$$(x, y) \mapsto \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i y_j$$

est une forme bilinéaire symétrique telle que $\Phi(\varphi) = A$ et donc Φ est surjective. □

Corollaire 4.5. — *(a) La dimension de $\mathcal{BL}(E)$ est n^2*

(b) La dimension de $\mathcal{S}(E)$, ou de $\mathcal{Q}(E)$, est $\frac{n(n+1)}{2}$

Démonstration. — En effet : (a) $\mathcal{BL}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{K})$ et $\dim(M_n(\mathbb{K})) = n^2$.

(b) $\mathcal{S}(E)$ est isomorphe à $\mathrm{Sym(n,\mathbb{K})}$ et $\dim(\mathrm{Sym(n,\mathbb{K})}) = \frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}$. □

Exemple 4.6. — (a) Toute forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ est de la forme

$$q(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Les résultats classiques sur l'existence des racines d'un polynôme montre que q est définie positive si, et seulement si,

$$\alpha\gamma - \beta^2 > 0 \quad \text{et} \quad \alpha > 0.$$

(b) La forme bilinéaire symétrique associée (dans la base canonique) à la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

est

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + 4x_2y_2 + 3x_2y_3 + x_3y_1 + 3x_3y_2 + 6x_3y_3 \end{aligned}$$

et la forme quadratique associée est

$$q(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

(c) la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_2 - 2x_2y_3 - x_3y_1 - 2x_3y_3$$

a pour matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Elle n'est donc pas symétrique.

(d) Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a + b \leq n$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & -I_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme bilinéaire symétrique associée (dans la base canonique) est

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{a} x_i y_i - \sum_{i=a+1}^{a+b} x_i y_i$$

et sa forme quadratique est

$$q(x) = \sum_{i=1}^{a} x_i^2 - \sum_{i=a+1}^{a+b} x_i^2.$$

Elle est définie positive si, et seulement si, $a = n$ et positive si, et seulement si, $b = 0$.

***Théorème 4.7* (Changement de bases).** — *Soit φ une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel E muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors*

$$Mat_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tPMat_{\mathcal{B}}(\varphi)P. \tag{4}$$

Démonstration. — Soient X et Y (respectivement X' et Y') les matrices colonnes des coordonnées de deux vecteurs x et y dans $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$). Alors $X = PX'$ et $Y = PY'$.

$$\varphi(x, y) = {}^tX\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)Y = {}^tX'({}^tP\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)P)Y'.$$

De l'unicité de la matrice de φ dans une base, on déduit que ${}^tP\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$. □

Definition 4.8. — *Le discriminant d'une forme bilinéaire φ, dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$, est le déterminant de la matrice $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ de φ dans cette base. On le note $\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$.*

Proposition 4.9. — *Soient φ une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel E muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors*

$$\Delta_{\mathcal{B}'}(\varphi) = (\mathbf{det}\, P)^2 \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

Démonstration. — C'est une conséquence de la formule (4). □

Compétence visée.

Savoir calculer la matrice d'une fbs ou d'une fq dans une base donnée.

5. Orthogonalité, noyau et rang

Dans ce paragraphe E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et φ une forme bilinéaire symétrique de forme quadratique associée q.

Definition 5.1. — *On dit que deux vecteur $x, y \in E$ sont* **orthogonaux relativement à** φ *ou encore* φ**-orthogonaux** *si, et seulement si* $\varphi(x, y) = 0$.

Exemple 5.2. — Sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire usuel

$$(x, y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2, \quad \text{ou} \quad (x, y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

définit une forme bilinéaire symétrique et la définition de l'orthogonalité corresponds bien à celle étudiée au Lycée.

Definition 5.3. — *Un vecteur $x \in E$ est φ-orthogonal à une partie A de E si, et seulement si,*

$$\forall a \in A, \quad \varphi(x, a) = 0.$$

On notre $A^{\perp_\varphi}$ le φ-orthogonal de A, c'est-a-dire

$$A^{\perp_\varphi} = \{x \in E, \ \forall a \in A, \ : \ \varphi(x, a) = 0\}.$$

On vérifie assez facilement les propriétés suivante

Proposition 5.4. — *(a) Pour toute partie $A \subset E$, $A^{\perp_\varphi}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

(b) Pour toutes parties A et B de E, on a $A \subset B \Rightarrow B^{\perp_\varphi} \subset A^{\perp_\varphi}$.

(c) Pour toute partie $A \subset E$, $A^{\perp_\varphi} = (\mathrm{Vect(A)})^{\perp_\varphi}$.

(d) $\{0_E\}^{\perp_\varphi} = E$

(e) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $F \subset (F^{\perp_\varphi})^{\perp_\varphi}$.

Definition 5.5. — *On dit qu'un vecteur $x \in E$ est* **isotrope** *relativement à φ s'il est orthogonal à lui même : $\varphi(x, x) = 0$. L'ensemble des vecteurs isotropes de E, relativement à φ, est appelé* **cône isotrope** *de φ (ou de q)*

$$C_\varphi = C_q = \{x \in X \ : q(x) = \varphi(x, x) = 0\}$$

Definition 5.6. — *On appelle* **noyeau** *de la fbs* φ *le sous-espace vectoriel*

$$\mathbf{Ker}(\varphi) = E^{\perp_\varphi} = \{x \in E,\ \forall y \in E,\ :\ \varphi(x, y) = 0\}.$$

On dit aussi que $\mathbf{Ker}(\varphi)$ est le noyau de la forme quadratique et on le note $\mathbf{Ker}(q)$.

Proposition 5.7. — *Le noyau de* φ *est contenu dans son cône isotrope, soit*

$$\mathbf{Ker}(\varphi) \subset C_\varphi$$

Démonstration. — Immédiat. □

Exemple 5.8. — On considère la fbs sur $\mathbb{R}^3$

$$\varphi(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

$x \in \mathbf{Ker}(\varphi)$ signifie que $\varphi(x, y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^3$ et en particulier pour les vecteurs de la base canonique e_1, e_2, e_3 et par suite $0 = \varphi(x, e_1) = x_1$, $0 = \varphi(x, e_2) = x_2$ et $0 = \varphi(x, e_3) = -x_3$. On en déduit que $\mathbf{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
Le cône isotrope de φ est formé des vecteurs x tels que $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Definition 5.9. — *On dit que la fbs* φ *est* **dégénérée** *(respectivement* **non dégénérée***) si, et seulement si,* $\mathbf{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ *(respectivement* $\mathbf{Ker}(\varphi) = \{0\}$*).*

Autrement dit,

$$\varphi \text{ non dégénérée} \iff \forall x \in E,\ (\forall y \in E,\ \varphi(x, y) = 0 \Rightarrow x = 0)$$

Dans la suite de ce paragraphe on suppose E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et A la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

Definition 5.10. — *On appelle* **rang** *de* φ *l'entier, noté* $\mathrm{rg}(\varphi)$*, défini par*

$$\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(E) - \dim(\mathbf{Ker}(\varphi)).$$

Théorème 5.11. — *Soit* u *l'endomorphisme de* E *ayant* A *pour matrice dans la base* $\mathcal{B}$*. On a*

(a) $\mathbf{Ker}(\varphi) = \mathbf{Ker}(u)$.
(b) $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(A)$.
(c) φ *est non dégénérée* $\iff \mathrm{rg}(\varphi) = n \iff A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. — Soit $x \in E$ et $X \in \mathbb{K}^n$ la matrice colonne formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{Ker}(\varphi) \iff \forall y \in E,\ \varphi(x,y) = 0 & \iff \forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{K}),\ {}^tXAY = 0 \\ & \iff {}^tXA = 0 \\ & \iff AX = 0 \\ & \iff X \in \mathbf{Ker}(A) \\ & \iff x \in \mathbf{Ker}(u) \end{aligned}$$

D'ou (a). Les points (b) et (c) découlent du théorème du rang.

□

6. Réduction des formes quadratiques

Dans la suite de ce paragraphe on suppose E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E

Definition 6.1. — *La base $\mathcal{B}$ de E est dite φ-orthogonale si, et seulement si, ses vecteurs sont deux à deux φ-orthogonaux. Autrement dit, $\mathcal{B}$ est φ-orthogonale si, et seulement si, $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale.*

***Théorème 6.2* (Théorème de réduction des fbs)**
Pour toute fbs φ sur E, il existe au moins une base φ-orthogonale de E.

Démonstration. — Si $\varphi = 0$, alors toute base de E est φ-orthogonale.

Supposons donc que $\varphi \neq 0$. On fait un récurrence sur $n = \dim E$. La propriété est triviale pour $n = 1$. Supposons-la vrai pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et φ une fbs sur E.

Comme $\varphi \neq 0$, il existe $e_1 \in E$ tel que $q(e_1) \neq 0$ (car sinon, la fbs est nulle). Soit le sous-espace vectoriel $F = \{e_1\}^\perp$. On montre assez facilement que $F \oplus \mathbb{K}e_1 = E$, en particulier $\dim F = n-1$. Considérons la restriction $\varphi_{|F}$ de φ à F. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_2, \ldots, e_{n+1})$ de F, $\varphi_{|F}$-orthogonale. A forciori, $\forall i, j \in \{2, \ldots, n+1\}$, $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$. Soit alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$. Comme F et $\mathbb{K}e_1$ sont en somme directe dans E, $\mathcal{B}$ est une base de E et elle est φ-orthogonale. □

Corollaire 6.3. — *Pour toute matrice symétrique $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{K})$, il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ et une matrice diagonale D telles que $A = {}^tPDP$.*

Remarque 6.4. — Les éléments diagonaux de D ne sont pas nécessairement les valeurs propres de A.

6.1. Réduction de Gauss des formes quadratiques. — La méthode de Gauss repose essentiellement sur les deux identités suivantes

$$x^2 + 2xu = (x+u)^2 - u^2 \tag{5}$$

et

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \tag{6}$$

Il s'agit d'éliminer successivement les variables, en commençant par toutes celles qui apparaissent avec un carré, qu'on élimine une à une, puis toutes les autres qu'on élimine par deux.

6.2. Cas des espaces de dimension 2. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathbb{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Pour tout vecteur $x \in E$, on note x_1, x_2 les coordonnées de x dans cette base, soit $x = x_1e_1 + x_2e_2$.

Dans cette base, une forme quadratique q s'écrit sous la forme

$$q(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

La matrice de cette forme quadratique dans la base $\mathcal{B}$ est donc

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

On suppose que la forme quadratique est non nulle, soit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

$\rightarrow$ Si $a \neq 0$, on a

$$q(x) = a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \frac{\delta}{a}x_2^2$$

où $\delta = ac - b^2$ est le déterminant de A. Il y a alors deux possibilités :

- soit $\delta = 0$ et

$$q(x) = a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 = a\ell_1^2(x)$$

où $\ell_1 : x \mapsto x_1 + \frac{b}{a}x_2$ est une forme linéaire non nulle.

– soit $\delta \neq 0$ et

$$q(x) = a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \frac{\delta}{a}x_2^2 = a\ell_1^2(x) + \frac{\delta}{a}\ell_2^2(x)$$

où $\ell_1 : x \mapsto x_1 + \frac{b}{a}x_2$ et $\ell_2 : x \mapsto x_2$ sont deux formes linéaires indépendantes puisque $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{a} & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

→ Si $a = 0$ et $c \neq 0$, on a

$$q(x) = 2bx_1x_2 + cx_2^2 = c\left(\frac{b}{c}x_1 + x_2\right)^2 + \frac{\delta}{c}x_1^2$$

où $\delta = -b^2$ est encore le déterminant de A et il y a deux possibilités

– soit $b = 0$ et

$$q(x) = cx_2^2 = x\ell_1^2(x)$$

où $\ell_1 : x \mapsto x_2$ est une forme linéaire non nulle.

– soit $b \neq 0$ et

$$q(x) = c\left(\frac{b}{c}x_1 + x_2\right)^2 + \frac{\delta}{c}x_1^2 = c\ell_1^2(x) + \frac{\delta}{c}\ell_2^2(x)$$

où $\ell_1 : x \mapsto \frac{b}{c}x_1 + x_2$ et $\ell_2 : x \mapsto x_1$ sont deux formes linéaires indépendantes.

→ Si $a = 0$ et $c = 0$, on a alors $b \neq 0$ et

$$q(x) = 2bx_1x_2 = \frac{b}{2}\left((x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2\right) = \frac{b}{2}\ell_1^2(x) + \frac{b}{2}\ell_2^2(x)$$

où $\ell_1 : x \mapsto x_1 + x_2$ et $\ell_2 : x \mapsto x_1 - x_2$ sont deux formes linéaires indépendantes.

On a donc monté le résultat suivant.

Théorème 6.5. — *Toute forme quadratique non nulle q sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 2 peut s'écrire sous la forme $q = \lambda\ell$ où λ est un scalaire non nul et ℓ une forme linéaire non nulle, ou sous la forme $q = \lambda_1\ell^1 + \lambda_2\ell^2$, où λ_1, λ_2 sont deux scalaires non nuls et ℓ_1, ℓ_2 deux formes linéaires indépendantes.*

Exemple 6.6. — (a) Sur $\mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} q_1(x) &= x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= (x_1 - 3x_2)^2 - 4x_2^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q_2(x) &= x_1x_2 \\ &= \tfrac{1}{4}(x_1+x_2)^2 - \tfrac{1}{4}(x_1-x_2)^2. \end{aligned}$$

6.3. Exemple dans le cas des espaces de dimension 3. — Commençons par un exemples en s'inspirant de la méthode faite dans le cas de dimension 2.

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$,

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

On regroupe les termes contenant x_1 pour l'écriture comme le début d'un carrée, soit

$$x_1^2 + 2x_1x_3 = (x_1+x_3)^2 - x_3^2$$

ce qui donne

$$q(x) = (x_1^2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3.$$

On utilise ensuite la méthode développée en dimension 2 à la forme quadratique q' définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q'(x_2,x_3) = x_2^2 + 2x_2x_3$, soit

$$q'(x_2,x_3) = (x_2+x_3)^2 - x_3^2$$

ce qui donne

$$q(x) = (x_1+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 - x_3^2 = \ell_1^2(x) + \ell_2^2(x) - \ell_3^2(x)$$

les formes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 étant indépendantes puisque

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

6.4. Cas général. — Soit E un espace vectoriel de dimension n et identifions E à $\mathbb{K}^n$.

Théorème 6.7 **(Théorème de réduction des fq)**

Pour toute forme quadratique non nulle q sur E, il existe un entier $p \in [\![1,n]\!]$, des scalaires non nuls $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{K}$, et des formes linéaires $\ell_1,\ldots,\ell_p \in E^*$ indépendantes, tels que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \ell_i^2(x), \ \forall x \in E.$$

Une telle décomposition n'est pas uniques. On l'appelle **réduction de Gauss**, ou tout simplement **réduction**, de la forme quadratique q.

Démonstration. — La méthode de Gauss permet d'obtenir pratiquement la réduction ci-dessous, en procédant par récurrence $n \geq 1$. Pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer et pour $n = 2$ c'est fait ci-dessus.

On suppose le résultat acquis a rang $n - 1$ et on se donne une forme quadratique non nulle q définie dans une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel $E \simeq \mathbb{K}^n$ de dimension $n \geq 3$ par

$$q(x) = \sum_i a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

Premier cas. Supposons que cette expression contient au moins un terme carré, c'est-à-dire qu'il existe un indice i tel que $a_{ii} \neq 0$ (pivot diagonal). Quitte à faire une permutations sur les vecteurs de la base, on peut supposer que $a_{11} \neq 0$. En regroupant les termes contenant x_1, on écrit que

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + 2\textstyle\sum_{j=2}^n a_{1j}x_1x_j &= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\textstyle\sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right) \\ &= a_{11}\left(\left(x_1 + \textstyle\sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2 - \left(\textstyle\sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{11}\left(x_1 + \textstyle\sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2 + q'(x') \\ &= a_{11}\ell_1^2 + q'(x') \end{aligned}$$

où $\ell_1 = x_1 + \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j$ et q' une forme quadratique définie sur le sous-espace vectoriel $F \simeq \mathbb{K}^{n-1}$ engendré par $e_2, \dots, e_n$ et $x' = (x_2, \dots, x_n)$.

– si $q' = 0$, on a $q = a_{11}\ell_1^2$ avec a_{11} et ℓ_1 non nuls.

– si $q' \neq 0$, l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe un entier $p \in [\![2, n]\!]$, des scalaires non nuls $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ et des formes linéaires indépendantes $\ell_2, \dots, \ell_n$ sur $F \simeq \mathbb{K}^{n-1}$ tels que

$$\forall x' \in F, \;\; q'(x') = \sum_{j=2}^p \lambda_j\ell_j^2(x')$$

et en prolongeant les formes linéaires $\ell_2, \dots, \ell_n$ à $E \simeq \mathbb{K}^n$ (en posant $\ell_j(x) = \ell_j(x')$), on a

$$q(x) = a_{11}\ell_1^2(x) + \sum_{j=2}^p \lambda_j\ell_j^2(x)$$

ce qui donne la décomposition demandée à condition de montrer que les formes $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ sont indépendantes.

Si $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \ell_j = 0$ est une combinaisons linéaire nulle, alors pour tout $x \in E$, $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \ell_j(x) = 0$. Pour $x = e_1$, on a $\ell_1(x) = 1$ et $\ell_j(x) = 0$ pour $j \in\in [\![2, n]\!]$, ce qui donne $\alpha_1 = 0$ et $\sum_{j=2}^{p} \alpha_j \ell_j = 0$. Comme la famille $\ell_2, \ldots, \ell_n$ est libre sur $F \simeq \mathbb{K}^{n-1}$, on a $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Deuxième cas. Supposons que q est sans terme carré, c'est-à-dire que tous les coefficients (diagonaux) a_{ii} sont nuls. Comme q est non nulle, il existe deux indices $i < j$ tels que $a_{ij} \neq 0$ (pivots rectangle). Quitte à faire une permutations sur les vecteurs de la base, on peut supposer que $a_{12} \neq 0$. En regroupant les termes contenant x_1 et x_2, on écrit

$$Q = a_{12}x_1x_2 + x_1 \sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j + x_2 \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j$$

sous la forme

$$Q = \left(a_{12}x_1 + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j\right)\left(x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{12}}x_j\right) - \left(\sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j\right)\left(\sum_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{12}}x_j\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} q(x) &= 2\textstyle\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j \\ &= 2Q + 2\textstyle\sum_{3\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j \\ &= 2L_1(x)L_2(x) + q'(x') \end{aligned}$$

où $L_1(x) = a_{12}x_1 + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j$, $L_2(x) = x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{12}}x_j$ et q' une forme quadratique définie sur le sous-espace vectoriel $F \simeq \mathbb{K}^{n-2}$ de E engendré par $e_3, \ldots, e_n$ avec $x' = (x_3, \ldots, x_n)$.

En écrivant

$$\begin{aligned} 2L_1(x)L_2(x) &= \tfrac{1}{2}(L_1(x) + L_2(x))^2 - \tfrac{1}{2}(L_1(x) - L_2(x))^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\ell_1^2(x) - \tfrac{1}{2}\ell_2^2(x) \end{aligned}$$

on a

$$q(x) = \frac{1}{2}\ell_1^2(x) - \frac{1}{2}\ell_2^2(x) + q'(x').$$

– si $q' = 0$, on alors $q(x) = \frac{1}{2}\ell_1^2(x) - \frac{1}{2}\ell_2^2(x)$, les formes ℓ_1 et ℓ_2 sont indépendantes puisque la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ 1 & -1 \\ a_{23} + \frac{a_{13}}{a_{12}} & a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{12}} \\ \vdots & \vdots \\ a_{2n} + \frac{a_{1n}}{a_{12}} & a_{2n} - \frac{a_{1n}}{a_{12}} \end{pmatrix}$$

est de rang 2 car le déterminant extrait $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2a_{12}$ est non nul.

– si $q' \neq 0$, l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe un entier un entier $p \in [\![3, n]\!]$, des scalaires non nuls $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$ et des formes linéaires indépendantes $\ell_3, \ldots, \ell_n$ sur $F \simeq \mathbb{K}^{n-2}$ tels que

$$\forall x' \in F, \ \ q'(x') = \sum_{j=3}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x')$$

et en prolongeant les formes linéaires $\ell_3, \ldots, \ell_n$ à $E \simeq \mathbb{K}^n$ (en posant $\ell_j(x) = \ell_j(x')$), on a

$$q(x) = \frac{1}{2}\ell_1^2(x) - \frac{1}{2}\ell_2^2(x) + \sum_{j=3}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x)$$

ce qui donne la décomposition demandée à condition de montrer que les formes $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ sont indépendantes.
Si $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \ell_j = 0$ est une combinaisons linéaire nulle, alors pour tout $x \in E$, $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \ell_j(x) = 0$. Pour $x = e_1$ et $x = e_2$, on a $\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{12} = 0$ et $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, ce qui conduit à $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et $\sum_{j=2}^{p} \alpha_j \ell_j = 0$. Comme la famille $\ell_3, \ldots, \ell_n$ est libre sur $F \simeq \mathbb{K}^{n-2}$, on a $\alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Exemples 6.8. — (1) Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$,

$$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

On utilise la formule (6) en éliminant les deux variables x_1 et x_2 dans la première étape. Pour cela on écrit

$$q(x) = (x_1 + ?_1)(x_2 + ?_2) - ?_1 ?_2 + 2x_3x_4$$

Plus précisément,

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - (x_3 + 4x_4)(2x_3 + 2x_4) + 2x_3x_4 \\ &= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 2x_3^2 - 8x_4^2 - 8x_3x_4 \\ &= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 2(x_3 + 2x_4)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4)^2 - \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - 2(x_3 + 2x_4)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\ell_1(x)^2 - \tfrac{1}{4}\ell_2(x)^2 - 2\ell_3(x)^2 \end{aligned}$$

les formes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 étant indépendantes. La forme quadratique est donc de signature $(1, 2)$ et de rang 3. Par conséquent son noyau est de dimension 1 et il est caractérisé par $\ell_1(x) = 0$, $\ell_2(x) = 0$ et $\ell_3(x) = 0$. On trouve alors le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(2, -2, 2, -1)$.

(2) Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$q(x) = -x_1^1 - x_2^2 - x_3^3 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

On utilise la formule (5) pour la variable x_1,

$$\begin{aligned} q(x) &= -(x_1^2 - 2x_1(x_2+x_3)) - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + 4x_2x_3 \end{aligned}$$

Ensuite on utilise la formule (6) pour x_2x_3,

$$\begin{aligned} q(x) &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + 4x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2 \\ &= -\ell_1(x)^2 + \ell_2(x)^2 + \ell_3(x)^2. \end{aligned}$$

On vérifie assez facilement que les trois formes linéaires ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont linéairement indépendantes. La forme quadratique q est donc de signature $(2,1)$.

□

Corollaire 6.9. — *Soit q une forme quadratique dont une réduction de Gauss est*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \ell_i^2(x), \ \forall x \in E$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des scalaires non nuls et $\ell_1, \ldots, \ell_r$ des formes linéaires indépendantes. Alors $\mathrm{rang}(q) = r$ *et* $\mathbf{Ker}(q) = \{x \in E, \ \ \ell_1(x) = \ldots = \ell_r(x) = 0\}$.

Démonstration. — On note $n = \dim E$. On complète la famille $\ell_1, \ldots, \ell_r$ en une base $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ de E^* et on considère la base préduale $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ (on a $\ell_i(v_j) = \delta_{ij}$). La matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est donc une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ où les r première λ_i sont non nuls et les suivants nuls. Il en résulte que $\mathrm{rang}(q) = \mathrm{rang}(D) = r$ et que $\mathbf{Ker}(q)$ est de dimension $n - r$. Comme les formes linéaires $\ell_1, \ldots, \ell_r$ sont indépendantes, l'espace vectoriel

$$F = \{x \in E, \ \ \ell_1(x) = \ldots = \ell_r(x) = 0\}$$

est un de dimension $n - r$. De plus $F \subset \mathbf{Ker}(q)$, d'où $\mathbf{Ker}(q) = F$. □

***Corollaire 6.10* (Cas complexe).** — *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique non nulle sur E. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = J_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

où r est le rang de la forme quadratique q.

Démonstration. — Reprenons les arguments de la démonstration du corollaire précédent. Il existe donc une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de E dans laquelle la matrice de φ est $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ où les λ_i des nombre complexes non nuls pour tout $1 \leq i \leq r$ et $\lambda_i = 0$ sinon. Soit ω_i le nombre complexe tel que $\lambda_i \omega_i^2 = 1$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Alors la famille $(\omega_1 v_1, \ldots, \omega_r v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ est une base de E et la matrice de φ dans cette base est bien J_r. □

***Corollaire 6.11* (Cas réel).** — *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique non nulle sur E. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} I_s & & O \\ & -I_t & \\ O & & O \end{pmatrix}$$

où $s + t$ est le rang de de la forme quadratique.

Démonstration. — Supposons q de rang r. Dans la réduction de Gauss de $q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \ell_i(x)^2$, les scalaires λ_i sont réels non nuls. Il y a donc un certain nombres de ces scalaires qui sont strictement positifs, soit s et d'autres qui sont strictement négatifs soit t. On a alors $s + t = r$ et il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de E dans laquelle la matrice de φ est $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ pour $1 \leq i \leq s$, $\lambda_i < 0$ pour $s + 1 \leq i \leq s + t$ et $\lambda_i = 0$ pour $s + t \leq i \leq n$. La famille

$$(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} v_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_s}} v_s, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{s+1}}} v_{s+1}, \ldots \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{s+t}}} v_{s+t}, v_{s+t+1}, \ldots, v_n)$$

est une base de E et la matrice de φ dans cette base est bien celle indiquée dans l'énoncé.

□

***Théorème 6.12* (Théorème d'inertie de Sylvester)**
Soit q une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Il existe alors des entiers s et t inférieurs à n et **ne dépendant que** *de q, tels que la matrice diagonale de q dans une base q-orthogonale de E possède s éléments strictement positifs et t éléments strictement négatifs. Le couple d'entier (s,t) est appelé signature de q.*

Démonstration. — Par hypothèse il existe des formes linéaires indépendantes $\ell_1, \ldots, \ell_r$ telles que

$$q = \ell_1 + \ldots + \ell_s - \ell_{s+1} + \ldots - \ell_r \tag{7}$$

où $r = s + t$. On complète la famille $\ell_1, \ldots, \ell_r$ en une base $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$. Supposons que la même forme quadratiques admette une autre décomposition

$$q = \xi_1 + \ldots + \xi_m - \xi_{m+1} + \ldots - \xi_r \tag{8}$$

avec m termes strictement positifs (et $r - m$ terme strictement négatifs) et où $\xi_, \ldots, \xi_r$ sont des formes linéaires indépendantes.

Si $m \neq s$, nous pouvons supposer que $m < s$. Considérons les deux sous-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} F &= \{x \in E,\ \xi_1(x) = \cdots \xi_m(x) = 0\} \\ G &= \{x \in E,\ \ell_{s+1}(x) = \cdots \ell_n(x) = 0\} \end{aligned}$$

Comme les formes linéaires qui définissent F et G sont linéairement indépendantes, $\dim F = n - m$ et $\dim G = s$. Comme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, $\dim(F + G) \leq n$, par suite

$$\begin{aligned} \dim(F \cap G) &= \dim F + \dim G - \dim(F + G) \\ &\geq n - m + s - n = s - m \end{aligned}$$

On en déduit que le sous-espace $F \cap G$ n'est pas nul et il existe un vecteur $z \in E$ **non nul** tel que $z \in F \cap G$.
La formule (8) et la définition de F montrent que $q(z) \leq 0$. La formule (7) et la définition de G montrent que $q(z) > 0$, ce qui est contradictoire. Par suite $s = m$ et la signature de la forme quadratique q est invariantes par changement de bases. □

Remarques 6.13. — *(a) Si q est de signature (s,t) alors s est la plus grande dimension d'un sous-espace F de E tel que la restriction de q à F soit définie positive et t est la plus grande dimension d'un sous-espace F de E tel que la restriction de q à F soit définie négative.*

(b) Le rang de φ est $s + t$.

(c) Une fbs est de signature (s,t) *si, et seulement si, il existe une base dans laquelle sa matrice est*

$$\begin{pmatrix} I_s & & O \\ & -I_t & \\ O & & O \end{pmatrix}$$

(d) En particulier, q *est définie positive si, et seulement si, sa signature est* $(n,0)$.

Compétence visée.

Savoir déterminer une réduction de Gauss d'une forme quadratique, trouver son rang, son noyau et sa signature.

---

version 1, 11 février 2018