CHAPITRE 1
FORMES LINÉAIRES ET DUALITÉ

Table des matières

1. Formes linéaires, espace dual

Dans tout ce chapitre K désignera un corps commutatif et E un K-espace vectoriel (de dimension finie ou non).

Definition 1.1. — *Soit E un K espace vectoriel.*

On appelle **forme linéaire** *sur E toute application linéaire de E dans K.*

On appelle **espace dual** *de E, noté E^*, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Autrement dit, $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ et $\varphi \in E^*$ signifie que $\varphi : E \to K$ est une application telle que : $\forall (x, y) \in E^2$ et $\forall (\alpha, \beta) \in K^2$, $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$.*

Exemple 1.2. — (a) L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + y$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

(b) L'application $\theta : E \to K$, $x \mapsto 0$ est une forme linéaire, appelée **forme nulle** sur E.

(c) Si $E = K[X]$ est l'espace des polynômes à coefficients dans K, alors pour tout $a \in K$, l'application $P \mapsto P(a)$ est une forme linéaire sur E.

(d) Si $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions réelles continues sur $[a,b]$, alors l'application $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur E.

(e) Si $E = \mathbf{M}_n(K)$, alors l'application trace, $A = (a_{ij}) \mapsto \mathbf{tr}(A) = \sum_1^n a_{ii}$ est une forme linéaire sur E.

(f) Soit E un K espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Tout élément $x \in E$ s'écrit donc d'une manière unique sous la forme $x = \sum_1^n \lambda_i e_i$.
Pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$, l'application $e_j^* : E \to K, x \mapsto e_j^*(x) = \lambda_j$ est une forme linéaire sur E , appelée $j^{\text{ème}}$ **forme coordonnée** relative à la base $\mathcal{B}$.

D'une façon générale on a :

Proposition 1.3. — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

(a) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$. L'application de K^n dans K qui à tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ associe le scalaire $\varphi(x) := \sum_1^n \lambda_j x_j$,est une forme linéaire sur K^n.

(b) Réciproquement, pour toute forme linéaire φ sur K^n, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ tel que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, on ait $\varphi(x) = \sum_1^n \lambda_j x_j$.

Démonstration. — Le point (a) résulte d'une vérification directe.

(b) Soit $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ la base canonique de K^n et soit $\varphi : K^n \to K$ une forme linéaire sur K^n.

Tout élément $x \in K^n$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i$ et donc $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(\epsilon_i)$. D'où l'existence et l'unicité des $\lambda_j := \varphi(\epsilon_j)$, $1 \leq j \leq n$.

□

Proposition 1.4. — *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Alors son dual E^* est de dimension finie et $\dim E^* = \dim E$.*

Démonstration. — En effet, $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, K) = \dim E \times \dim K = \dim E$. □

2. Hyperplans

Definition 2.1. — *Soit E un K-espace vectoriel. On appel* **hyperplan** *de E, le noyau de toute forme linéaire sur E autre que la forme nulle. Autrement dit, une partie H de E est un hyperplan de E s'il existe $\varphi \in$*

$E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = \mathbf{Ker}(\varphi)$. On dit alors que la relation $\varphi(x) = 0$ est une équation de l'hyperplan H.

Exemple 2.2. — (a) $H = \{A \in \mathbf{M}_n(K);\ \ \mathbf{Tr}(A) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$.

(b) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \ 2x - 3y + z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

(c) $H = \{P \in K[X];\ \ P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $K[X]$.

Proposition 2.3. — *Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) H est un hyperplan de E.

(b) Il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = H \oplus D$.

Si E est de dimension finie, les conditions précédentes sont équivalentes à

(c) $\dim(H) = \dim(E) - 1$ (autrement dit, H est de codimension 1).

Démonstration. — (a)$\Rightarrow$(b) : Si H est un hyperplan de E, il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \mathbf{Ker}(\varphi)$. Puisque φ n'est pas nulle, il existe $v \in E$ tel que $\varphi(v) \neq 0$. Considérons la droite vectorielle $D = Kv$ et montrons que $E = H \oplus D$. Soit $x \in H \cap D$. Il existe $\lambda \in K$ tel que $x = \lambda v$ et $\varphi(x) = 0$, donc $\lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) = 0$. Comme $\varphi(v)$ est non nul, on déduit que $\lambda = 0$ et $x = 0$. Ainsi $H \cap D = \{0\}$. Soit $x \in E$ et montrons que $x \in H + D$. Soit $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}$ et posons $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v$ qui est un élément de H puisque $\varphi(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\varphi(v) = 0$. D'où $x = y + \lambda v \in H + D$. $\square$

Remarque 2.4. — Si E est de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1}^n$ une base de E. Relativement à la base $\mathcal{B}$ un hyperplan H de E admet une équation unique, à un scalaire multiplicatif près, de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ où on a noté $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées des vecteurs $x \in E$ par rapport à $\mathcal{B}$.

Corollaire 2.5. — *Deux formes linéaires non nulles sur un espace vectoriel E sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.*

Démonstration. — Soient $\varphi, \phi \in E^* \setminus \{0\}$. Supposons que $\mathbf{Ker}(\varphi) = \mathbf{Ker}(\phi) =: H$. Soit $v \notin H$ (donc $\varphi(v)$ et $\phi(v)$ ne sont pas nuls) . Posons $\alpha = \frac{\varphi(v)}{\phi(v)}$ et montrons que $\varphi = \alpha\phi$. Soit $x \in E$, d'après la proposition précédente $E = H \oplus Kv$, donc x s'écrit $x = y + \lambda v$ avec $y \in H$ et $\lambda \in K$. D'où $\varphi(x) = \varphi(y) + \lambda\varphi(v) = \lambda\varphi(v) = \lambda(\alpha\phi(v)) = \alpha(\phi(y) + \lambda\phi(v)) =$

$\alpha\phi(x)$. Donc φ et ϕ sont proportionnelles.
La réciproque est immédiate.

$\square$

3. Base duale

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $n \geq 1$. Nous renvoyons à l'exemple 1.2 pour la définition des formes linéaires e_i^*.

Proposition 3.1. — *Soit $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1}^n$ une base de E. La famille des formes coordonnées $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i=1}^n$ est une base de l'espace dual E^*, appelée* **base duale** *de $\mathcal{B}$.*
De plus, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a les relations (d'orthogonalité) de Kronecker :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

Démonstration. — Par définition

$$e_i^* : E \to K,\ x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \mapsto e_i^*(x) = \lambda_i.$$

Donc $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Soit $\varphi \in E^*$ et considérons la forme linéaire $\phi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)e_i^*$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $\phi(e_j) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)\delta_{ij} = \varphi(e_j)$. Les formes linéaires φ et ϕ coïncident sur une base de E sont donc égales. Par conséquent,

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)e_i^*$$

et la famille $\mathcal{B}^*$ est une famille génératrice de E^*. Comme $\dim(E^*) = \dim(E) = n$, la famille $\mathcal{B}^*$ est une base de E^*. $\square$

Corollaire 3.2. — *Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1}^n$ une base de E et $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i=1}^n$ sa base duale, alors on a les relations suivantes :*

$\forall x \in E,\ \ x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i,$
$\forall \varphi \in E^*,\ \ \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)e_i^*,$
$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \ a_{ij} = e_i^*(f(e_j)),\quad$ *où* $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = Mat_{\mathcal{B}}(f).$

Proposition 3.3. — *(a) Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, il existe un vecteur $x \in E$ (non nulle) tel que $\varphi(x) = 1$.*

(b) Si x est un vecteur de E non nul, il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$.

Démonstration. — (a) Si $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$, alors il existe $v \in E$ tel que $\varphi(v) \neq 0$. Le vecteur $x = \frac{v}{\varphi(v)}$ convient.

(b) Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ est non nul, alors il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $e_{i_0}^*(x) = x_{i_0} \neq 0$. La forme linéaire $\varphi = \frac{1}{e_{i_0}^*(x)} e_{i_0}^*$ convient. □

Proposition 3.4. — *Toute base de E^* est la base duale d'une unique base de E, appelée* **base préduale**

Démonstration. — Soit $\mathcal{F} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de E^*. L'application $\Phi : x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ de E dans K^n est linéaire. Soit $x \in \mathbf{Ker}(\Phi)$, donc $\varphi_1(x) = \ldots = \varphi_n(x) = 0$. Si x n'est pas nul, alors d'après la proposition précédente, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$. Cette forme linéaire s'écrit dans la base $\mathcal{F}$ sous la forme $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$. Par conséquent $1 = \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ ce qui est absurde. On en déduit que $x = 0$, que le noyau de Φ est réduit à $\{0\}$ et que Φ est injective. Comme $\dim(E^*) = n = \dim(K^n)$, l'application Φ est un isomorphisme.

Notons $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ la base canonique de K^n. Pour tout j, un vecteur e vérifie $\varphi_i(e) = \delta_{ij}$ pour tout i si, et seulement si $\Phi(e) = \epsilon_j$. Puisque Φ est un isomorphisme, la famille $\mathcal{B} = (\Phi^{-1}(\epsilon_1), \ldots, \Phi^{-1}(\epsilon_n))$ est une base de E et c'est la seule famille de E satisfaisant aux conditions de Kronecker. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est l'unique base de E dont $\mathcal{F}$ est la base duale.

□

Proposition 3.5 **(Changement de base duale)**

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E, et soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}_1^*$ à $\mathcal{B}_2^*$ est ${}^tP^{-1}$.

Démonstration. — Posons $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{B}_2 = (f_1, \ldots, f_n)$ et $P = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, puis notons $Q = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1^*$ à $\mathcal{B}_2^*$. Par définition de la matrice de passage on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell k} e_\ell$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f_j^* = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i^*$. Donc pour tout

$j, k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\delta_{jk} = f_j^*(f_k) &= (\sum_{i=1}^n b_{ij} e_i^*)(\sum_{\ell=1}^n a_{\ell k} e_\ell) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=1}^n b_{ij} a_{\ell k} \delta_{i\ell} \\ &= \sum_{i=1}^n b_{ij} a_{ik} \\ &= ({}^t\!QP)_{jk}.\end{aligned}$$

Donc ${}^t\!QP = I_n$ et $Q = {}^tP^{-1}$. □

***Corollaire 3.6* (Calcul pratique de la base duale)**
Soient $\mathcal{B}_0 = (e_i)_{i=1}^n$ la base canonique de E et $\mathcal{B}_0^* = (e_i^*)_{i=1}^n$ sa base duale. Soit $\mathcal{B} = (v_i)_{i=1}^n$ une autre base de E et $\mathcal{B}^* = (v_i^*)_{i=1}^n$ sa base duale. Les vecteurs v_i (respectivement v_i^*) étant exprimés dans la base $\mathcal{B}_0$ (respectivement $\mathcal{B}_0^*$). Alors

$$Mat_{\mathcal{B}_0^*}(\mathcal{B}^*) = {}^t(Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}))^{-1}.$$

Exemples 3.7. — (a) Soient les vecteurs $v_1 = (-3, -1, 1)$, $v_2 = (5, 2, -1)$, $v_3 = (6, 2, -1)$ de $\mathbb{R}^3$ exprimés dans la base canonique (e_1, e_2, e_3). La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque la matrice $P = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible (de déterminant -1). Déterminons sa base duale.

Soit $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ la base duale de $\mathcal{B}$. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}_0^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ (matrice duale de la matrice canonique) à $\mathcal{B}^*$ est

$${}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conclue donc que

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) &= y + 2z \\ \varphi_2(x, y, z) &= -x + 3y \\ \varphi_3(x, y, z) &= x - 2y + z \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \varphi_1 &= e_2^* + 2e_3^* \\ \varphi_2 &= -e_1^* + 3e_2^* \\ \varphi_3 &= e_1^* - 2e_2^* + e_3^* \end{cases}$$

(b) Soient

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) &= x+2y+3z \\ \varphi_2(x,y,z) &= 2x+3y+4z \\ \varphi_3(x,y,z) &= 3x+4y+6z \end{cases}$$

trois formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$. Dans la base $\mathcal{B}_0^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ elles s'écrivent

$$\begin{cases} \varphi_1 &= e_1^* + 2e_2^* + 3e_3^* \\ \varphi_2 &= 2e_1^* + 3e_2^* + 4e_3^* \\ \varphi_3 &= 3e_1^* + 4e_2^* + 6e_3^* \end{cases}$$

La famille $\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est bien une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ puisque la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

est inversible. Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ dont $\mathcal{F}$ est la base duale. La matrice de passage de de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est donc

$${}^t\!Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conclue donc que $v_1 = (-2,0,1)$, $v_2 = (0,3,-2)$ et $v_3 = (1,-2,1)$.

Compétence visée.

Savoir déterminer une base duale d'une base donnée de E, ou une base préduale d'une base donnée de E^*.

4. Bidual d'un espace vectoriel

Definition 4.1. — *Soit E un espace vectoriel. Le dual de E^*, noté E^{**} est appelé* **bidual** *de E.*

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et considérons l'application

$$\begin{array}{rccccl} \Phi: & E & \to & E^{**} & & \\ & x & \mapsto & \tilde{x}: & E^* & \to K \\ & & & & \varphi & \mapsto \varphi(x) \end{array}$$

Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En effet, la linéarité est facile à démontrer. Soit $x \in \mathbf{Ker}(\Phi)$, alors $\varphi(x) = 0$ pour tout $\varphi \in E^*$. On en déduit d'après la Proposition 3.3 que $x = 0$. Donc Φ est injectif et comme E, E^* et E^{**} ont la même dimension, Φ est un isomorphisme de E sur E^{**}.

Cet isomorphisme permet d'identifier le bidual E^{**} à E.

---

version 1, 29 janvier 2018

- *Url :* `http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Khalid.Koufany/Alg-Bil`