Algèbre bilinéaire

Contrôle Continu du 24/03/2016

Epreuve de 2 heures

1. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie pour tout vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ par

$$q(\mathbf{x}) = x_1x_2 + ax_2x_3 + bx_1x_4 + x_2x_4,$$

a et b étant deux réels quelconques.
Déterminer suivant les valeurs de a et b la signature et le rang de q.

2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

(a) Montrer que φ est un produit scalaire.
(b) Préciser et justifier (sans calculs) le rang et la signature de la forme quadratique associée à φ.
(c) Soit $H = \{P \in E;\quad P(0) = 0\}$. Montrer que H est un hyperplan de E et donner une base de H.
(d) Determiner une base orthonormée de H relativement au produit scalaire φ.
(e) Déterminer la dimension et une base de $H^\perp$.
(f) Calculer la distance du polynôme $R = 1 + X + X^2$ à H.

3. On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ des vecteurs $(x, y, z, t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$ vérifiant les équations

$$x + y + z + t = 0, \quad x - y + z - t = 0$$

où $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
(a) Donner une base orthonormée de F.
(b) Déterminer les équations qui caractérisent $F^\perp$.
(c) Donner une base orthonormée de $F^\perp$.
(d) Ecrire dans la base $\mathcal{B}_0$, la matrice de la projection orthogonale $\mathbf{pr}_F$ sur F.
(e) En déduire la matrice, dans la base $\mathcal{B}_0$, de la symétrie orthogonale $\mathbf{s}_{F^\perp}$ par rapport à $F^\perp$.
(f) Calculer la distance $d(v, F)$ où $v = (1, 1, 1, 3)$.