Algèbre bilinéaire

Contrôle Continu du 24/03/2016

Epreuve de 2 heures

1. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie pour tout vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ par

$$q(\mathbf{x}) = x_1x_2 + ax_2x_3 + bx_1x_4 + x_2x_4,$$

a et b étant deux réels quelconques. Déterminer suivant les valeurs de a et b la signature et le rang de q.

Réponse. On commence par le terme x_1x_2, pour cela on repère les termes qui contiennent x_1 ou x_2, on forme un produit qui contient x_1 et x_2 en éliminant les 2 variables x_1 et x_2 et ne gardant que les termes qui ne contiennent ni x_1 ni x_2 (il y en a pas pour notre forme quadratique),

$$q(\mathbf{x}) = (x_1 + A)(x_2 + B) - AB$$

Plus précisément

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= (x_1 + ax_3 + x_4)(x_2 + bx_4) - (ax_3 + x_4)(bx_4) \\ &= (x_1 + ax_3 + x_4)(x_2 + bx_4) - bx_4^2 - abx_4x_3 \end{aligned}$$

ensuite on utilise la relation

$$uv = \frac{1}{4}(u+v)^2 - \frac{1}{4}(u-v)^2$$

donc

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + ax_3 + (1+b)x_4)^2 - \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 + ax_3 + (1-b)x_4)^2 - bx_4^2 - abx_4x_3 \\ &= \tfrac{1}{4}\ell_1(\mathbf{x})^2 - \tfrac{1}{4}\ell_2(\mathbf{x})^2 - bx_4^2 - abx_4x_3 \end{aligned}$$

où $\ell_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + ax_3 + (1+b)x_4$ et $\ell_2(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + ax_3 + (1-b)x_4$.
Enfin on utilise la relation (pour les variable x_3, x_4)

$$u^2 + 2uv = (u+v)^2 - v^2$$

pour trouver

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= \tfrac{1}{4}\ell_1(\mathbf{x})^2 - \tfrac{1}{4}\ell_2(\mathbf{x})^2 - b(x_4^2 + ax_4x_3) \\ &= \tfrac{1}{4}\ell_1(\mathbf{x})^2 - \tfrac{1}{4}\ell_2(\mathbf{x})^2 - b[(x_4 + \tfrac{a}{2}x_3)^2 - (\tfrac{a}{2}x_3)^2] \\ &= \tfrac{1}{4}\ell_1(\mathbf{x})^2 - \tfrac{1}{4}\ell_2(\mathbf{x})^2 - b\ell_3(\mathbf{x})^2 + \tfrac{ba^2}{4}\ell_4(\mathbf{x})^2 \end{aligned}$$

où $\ell_3(\mathbf{x}) = x_4 + \frac{a}{2}x_3$ et $\ell_4(\mathbf{x}) = x_3$.

Les 4 formes linéaire $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ sont linéairement indépendantes, puisque le déterminant de leurs coordonnées dans la base canoniques de $(\mathbb{R}^4)^*$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ a & a & \frac{a}{2} & 1 \\ 1+b & 1-b & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

est non nul. On en déduit que

- *si* $b = 0$, $\mathrm{sg}(q) = (1,1)$, $\mathrm{rg}(q) = 2$*;*
- *si* $b > 0$ *et* $a = 0$, $\mathrm{sg}(q) = (1,2)$, $\mathrm{rg}(q) = 3$*;*
- *si* $b > 0$ *et* $a \neq 0$, $\mathrm{sg}(q) = (2,2)$, $\mathrm{rg}(q) = 4$*;*
- *si* $b < 0$ *et* $a = 0$, $\mathrm{sg}(q) = (2,1)$, $\mathrm{rg}(q) = 3$*;*
- *si* $b < 0$ *et* $a \neq 0$, $\mathrm{sg}(q) = (2,2)$, $\mathrm{rg}(q) = 4$.

---

2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

(a) Montrer que φ est un produit scalaire.
(b),Préciser et justifier (sans calculs) la signature et le rang de la forme quadratique associée φ.
(c) Soit $H = \{P \in E;\ \ P(0) = 0\}$. Montrer que H est un hyperplan de E et donner une base de H.
(e) Déterminer la dimension et une base de $H^\perp$.
(f) Calculer la distance du polynôme $R = 1 + X + X^2$ à H.

Réponse. (a) φ est une forme bilinéaire symétrique (facilement vérifiable). Pour tout $P \in E$, on a $\varphi(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0$, donc φ est positive. De Plus si $\varphi(P,P) = 0$, alors $P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 = 0$, autrement dit $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Le polynôme P est de degré ≤ 2 et admet au moins 3 racines distinctes, il est dont nul. Donc φ est définie.
On en déduit que φ est une f.b.s. définie positive, c'est donc un produit scalaire.

(b) Soit q la forme quadratique associée à φ. Donc q est définie positive et par suite $\mathrm{sg}(q) = (3,0)$ *et* $\mathrm{rg}(q) = 3$.

(c) On considère l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) = P(0)$. Il est facile de montrer que Φ est une forme linéaire sur E, Donc $H =$ $\mathbf{Ker}(\Phi)$ *est un hyperplan de E. Il est donc de dimension 2. Déterminons une base de H. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$. On a $P \in H$ ssi $P(0) = 0$ ssi $a_0 = 0$ et donc $P = a_1X + a_2X^2 \in$* $\mathrm{Vect}\{X, X^2\}$*. Comme les deux polynômes X et X^2 sont linéairement indépendants,* $\dim \mathrm{Vect}\{X, X^2\} = 2$*, donc $H =$* $\mathrm{Vect}\{X, X^2\}$ *et la famille* $\{X, X^2\}$ *est une base de H.*

(d) On applique maintenant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $\{X, X^2\}$ *:*

On pose $Q_1 = X$*, donc* $\|Q_1\|^2 = \varphi(X,X) = 0^2+1^2+2^2 = 5$*, d'où* $P_1 = \frac{1}{\|Q_1\|}Q_1 = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{5}}X}$.

On pose $Q_2 = X^2 - \varphi(X^2, P_1)P_1$*. On a*

$$\varphi(X^2, P_1) = \varphi(X^2, \frac{1}{\sqrt{5}}X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi(X^2, X) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2^2\cdot 2) = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

donc $Q_2 = X^2 - \frac{9}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}X = X^2 - \frac{9}{5}X$ *et*

$$\|Q_2\|^2 = \varphi(Q_2, Q_2) = 0^2 - (1-\frac{9}{5})^2 + (4 - \frac{9}{5}\cdot 2)^2 = \frac{16}{25} + \frac{4}{25} = \frac{4}{5}.$$

Donc $P_2 = \frac{1}{\|Q_2\|}Q_2 = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{2}(X^2 - \dfrac{9}{5}X)}$.
Les vecteurs P_1 *et* P_2 *forment donc une b.o.n. de* H *pour le produit scalaire* φ.

(e) On sait que $\dim H + \dim H^{\perp} = \dim E = 3$*, donc* $\dim H^{\perp} = 1$*. On va déterminer une de* $H^{\perp}$*. Pour cela il suffit de déterminer un vecteur orthogonal à* H*. Soit* $P \in E$*, on a*

$$P \in H^{\perp} \iff \begin{cases} \varphi(P,X) & = 0 \\ \varphi(P,X^2) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 + P(1) + 2P(2) & = 0 \\ 0 + P(1) + 2^2P(2) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} P(1) & = 0 \\ P(2) & = 0 \end{cases}$$

Ainsi $P \in H^{\perp} \iff P = \lambda(X-1)(X-2)$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Le vecteur* $Q_0 = (X-1)(X-2)$ *constitue donc une base de* $H^{\perp}$*, c-à-d.* $H^{\perp} = \mathbb{R}Q_0$.

(f) On a $d(R,H) = \|R - \mathbf{pr}_H(R)\| = \|\mathbf{pr}_{H^{\perp}}(R)\|$*. Or*

$$\forall P \in E, \ \ \mathbf{pr}_{H^{\perp}}(P) = \frac{\varphi(P,Q_0)}{\|Q_0\|^2}Q_0$$

donc

$$\|\mathbf{pr}_{H^{\perp}}(R)\| = \|\frac{\varphi(R,Q_0)}{\|Q_0\|^2}Q_0\| = \frac{|\varphi(R,Q_0|}{\|Q_0\|}$$

Un calcul simple montre que $\|Q_0\| = 2$ *et* $\varphi(P,Q_0) = 2$*, donc* $d(R,H) = 1$.

3. On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ des vecteurs $(x,y,z,t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$ vérifiant les équations

$$x+y+z+t = 0, \quad x-y+z-t = 0$$

où $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(a) Donner une base orthonormée de F.

(b) Déterminer les équations qui caractérisent $F^{\perp}$.

(c) Donner une base orthonormée de $F^{\perp}$.

(d) Ecrire dans la base $\mathcal{B}_0$, la matrice de la projection orthogonale p sur F.

(e) Ecrire dans la base $\mathcal{B}_0$, la matrice de la symétrie orthogonale s par rapport à $F^{\perp}$.

(f) Calculer la distance $d(v,F)$ où $v = (1,1,1,3)$.

Réponse. (a) F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et les vecteurs $v_1 = (1, 0, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0, -1)$ forment est une base de F.
Ces deux vecteurs étant orthogonaux et tous les deux de norme $\sqrt{2}$, on déduit que les vecteurs $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$ forment une b.o.n. de F.

(b) et (c) Un vecteur $v = (x, y, z, t) \in F^{\perp}$ si et seulement si $(v|v_1) = (v|v_2) = 0$ ce qui donne $x = z$ et $y = t$ donc $v \in Vect((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)) = F^{\perp}$. Ces deux vecteurs étant orthogonaux et tous les deux de norme $\sqrt{2}$, on déduit que les et les vecteurs $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)$ forment une b.o.n. de $F^{\perp}$.

(d) La projection orthogonale sur F est donnée, pour tout $w \in E$, par

$$\mathbf{pr}_F(w) = (w|u_1)u_1 + (w|u_2)u_2$$

où $\{u_1, u_2\}$ est la b.o.n. de F trouvée en (a).

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On trouve $\mathbf{pr}_F(e_1) = \frac{1}{2}(1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{pr}_F(e_2) = \frac{1}{2}(0, 1, 0, -1)$, $\mathbf{pr}_F(e_3) = \frac{1}{2}(-1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{pr}_F(e_4) = \frac{1}{2}(0, -1, 0, 1)$. Ainsi la matrice de l'application linéaire $\mathbf{pr}_F$ est donnée par

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Puisque $\mathbf{s}_{F^{\perp}} = 2\mathbf{pr}_{F^{\perp}} - Id = 1 - 2\mathbf{pr}_F$, on déduit que la matrice de $\mathbf{s}_{F^{\perp}}$ dans la base canonique de $\mathcal{B}_0$ est

$$I_4 - 2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(f) Soit $v = (1, 1, 1, 3)$, alors $d(v, F) = \|v - q\|$, où $q = \mathbf{pr}_F(v)$ est la projection orthogonale de v sur F. Le vecteur q peut être calculer de différentes manières. Par exemple, $q = \mathbf{pr}_F(v) = A{\cdot}v = (0, -1, 0, 1)$. D'où $v - q = (1, 2, 1, 2)$ et $d(v, F) = \sqrt{10}$.