Algèbre bilinéaire

Contrôle Continu du 30/03/2017

Epreuve de 2 heures

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^4$ de base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Dans cette base, on considère les vecteurs suivants

$$v_1 = (1,0,0,0),\ v_2 = (1,0,1,0),\ v_3 = (1,1,1,-1),$$

et on note $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$.

1. On munit E de son produit scalaire usuel $\langle x\,, y\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$.
   (a) Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, en déduire la dimension de F.
   (b) Déterminer une base orthonormale de F.
   (c) Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
   (d) Déterminer la matrice de la projection orthogonale p_F sur F.
   (e) En déduire la matrice de symétrie orthogonale $s_{F^\perp}$ par rapport à $F^\perp$.
   (f) Soit $v = (1,1,0,0)$. Déterminer $d(v,F)$ et $d(v,F^\perp)$.
2. On considère la forme quadratique q sur E définie par
   $$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 6x_3x_4.$$
   (a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$, qu'on notera A.
   (b) Déterminer l'orthogonal de F pour q. Quelle est sa dimension?
   (c) Que peut-on en déduire de la dégénérescence de la forme quadratique q.
   (d) Donner une réduction de Gauss de la forme quadratique q.
   Déterminer alors sa signature, son rang et son noyau.
   (e) Déterminer une base de E qui soit q-orthogonale.
   (f) Déterminer une matrice inversible P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Exercice 2. Soit E un espace préhilbertien réel munit du produit scalaire $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ et $a \in E$ un vecteur de nome 1. On définit l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x,y) = \langle x,y\rangle + \lambda\langle x,a\rangle\langle a,y\rangle$$

où λ est un nombre réel non nul.

(a) Montrer que si φ est un produit scalaire alors $1+\lambda > 0$.

(b) Réciproquement, montrer que si $1+\lambda > 0$, alors φ est un produit scalaire. (On distinguera le cas où $\lambda \geq 0$ et le cas où $-1 < \lambda < 0$ et dans ce dernier cas on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).