Algèbre bilinéaire

Contrôle Continu du 30/03/2017

Epreuve de 2 heures

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^4$ de base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Dans cette base, on considère les vecteurs suivants

$$v_1 = (1, 0, 0, 0),\ v_2 = (1, 0, 1, 0),\ v_3 = (1, 1, 1, -1),$$

et on note $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$.

1. On munit E de son produit scalaire usuel $\langle x\,, y\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$.

   (a) Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, en déduire la dimension de F.

   (b) Déterminer une base orthonormale de F.

   (c) Déterminer une base orthonormale de $F^{\perp}$.

   (d) Déterminer la matrice de la projection orthogonale p_F sur F.

   (e) En déduire la matrice de symétrie orthogonale $s_{F^{\perp}}$ par rapport à $F^{\perp}$.

   (f) Soit $v = (1, 1, 0, 0)$. Déterminer $d(v, F)$ et $d(v, F^{\perp})$.

   [Barème. (a):1, (b):$1+1+1$, (c):1, (d):1, (e):1, (f):$1+1$]

2. On considère la forme quadratique q sur E définie par

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 6x_3x_4.$$

   (a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$, qu'on notera A.

   (b) Déterminer l'orthogonal de F pour q. Quelle est sa dimension?

   (c) Que peut-on en déduire de la dégénérescence de la forme quadratique q.

   (d) Donner une réduction de Gauss de la forme quadratique q.
   Déterminer alors sa signature, son rang et son noyau.

   (e) Déterminer une base de E qui soit q-orthogonale.

   (f) Déterminer une matrice inversible P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

   [Barème. (a):1, (b):$1+0,5$, (c):0,5, (d):2+0,5+0,5+0,5, (e):1, (f):1]

Corrigé.

1. (a) *Si $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ alors $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_3) = (0, 0, 0)$, d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille (v_1, v_2, v_3) étant libre et engendre F, c'est donc une base de F.*

(b) *On va appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la famille* (v_1, v_2, v_3).
$u_1 := v_1 = (1,0,0,0)$, $\|u_1\| = 1$, *donc* $f_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \boxed{(1,0,0,0)}$.
$u_2 := v_2 - \langle v_2, f_1\rangle f_1 = (0,0,1,0)$. *Ce vecteur est de norme 1, donc* $f_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \boxed{(0,0,1,0)}$.
$u_3 := v_3 - \langle v_3, f_1\rangle f_1 - \langle v_3, f_2\rangle f_2 = (0,1,0,-1)$. *Ce vecteur est de norme* $\sqrt{2}$, *donc* $f_3 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)}$.
Par conséquent (f_1, f_2, f_3), *est une b.o.n. de* F *pour le produit scalaire usuel.*

(c) *On peut remarquer que comme* $\dim F = 3$, *alors* $\dim F^\perp = \dim E - \dim F = 1$.
Soit $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. *On a*

$$\begin{aligned}
v \in F^\perp \quad &\iff \quad \begin{cases} \langle v, f_1\rangle = 0 \\ \langle v, f_2\rangle = 0 \\ \langle v, f_3\rangle = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad v = (0, x_2, 0, x_2) = x_2(0,1,0,1)
\end{aligned}$$

On en déduite que $F^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad x_1 = x_3 = 0, \ x_2 = x_4\}$ *et que le vecteur* $u_4 = (0,1,0,1)$ *constitue une base de* $F^\perp$. *Ce vecteur étant de norme* $\sqrt{2}$, *le vecteur* $f_4 = \frac{u_4}{\|u_4\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)}$ *constitue une b.o.n. de* $F^\perp$.

(d) *Notons* p_F *la projection orthogonale de* E *sur* F. *Comme* (f_1, f_2, f_3) *est une b.o.n. de* F, *alors pour tout vecteur* $v \in E$,

$$p_F(v) = \sum_{i=1}^{3} \langle v, f_i\rangle f_i$$

Rappelons que $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ *est la base canonique de* E. *On a*

$$\begin{aligned}
p_F(e_1) &= \langle e_1, f_1\rangle f_1 + \langle e_1, f_2\rangle f_2 + \langle e_1, f_3\rangle f_3 = (1,0,0,0) \\
p_F(e_2) &= \langle e_2, f_1\rangle f_1 + \langle e_2, f_2\rangle f_2 + \langle e_2, f_3\rangle f_3 = \frac{1}{2}(0,1,0,-1) \\
p_F(e_3) &= \langle e_3, f_1\rangle f_1 + \langle e_3, f_2\rangle f_2 + \langle e_3, f_3\rangle f_3 = (0,0,1,0) \\
p_F(e_4) &= \langle e_4, f_1\rangle f_1 + \langle e_4, f_2\rangle f_2 + \langle e_4, f_3\rangle f_3 = -\frac{1}{2}(0,1,0,-1).
\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de p_F *dans la base* $\mathcal{B}_0$ *est*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(e) *On a* $s_{F^\perp} = 2p_{F^\perp} - Id = Id - 2p_F$, *donc*

$$Mat_{\mathcal{B}_0}(s_{F^\perp}) = I_4 - 2Mat_{\mathcal{B}_0}(p_F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(f) *Soit* $v = (1,1,0,0)$. *On a*

$$p_F(v) = \langle v, f_1\rangle f_1 + \langle v, f_2\rangle f_2 + \langle v, f_3\rangle f_3 = (1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}),$$

et

$$p_{F^\perp}(v) = \langle v, f_4\rangle f_4 = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}).$$

On peut aussi écrire

$$p_{F^\perp}(v) = v - p_F = (1,1,0,0) - (1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}),$$

car $p_{F^\perp} + p_F = Id_E$. *Donc*

$$d(v, F) = \|v - p_F(v)\| = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

et

$$d(v, F^\perp) = \|v - p_{F^\perp}(v)\| = \|p_F(v)\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

2. (a) *On a*

$$A = Mat_{\mathcal{B}_0}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) *On a* $F^{\perp_q} = (Vect\{f_1, f_2, f_3\})^{\perp_q} = \{f_1, f_2, f_3\}^{\perp_q}$. *Or si* $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$, *alors*

$$\begin{aligned} v \perp_q f_1 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \quad x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{aligned}$$

De même on obtient

$$v \perp_q f_2 \iff x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

et

$$v \perp_q f_3 \iff -x_1 - x_3 - x_4 = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} v \in F^{\perp_q} &\iff \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff v = x_1(1,0,-1,0) + x_4(0,-1,-1,1) \end{aligned}$$

D'où $F^{\perp_q} = Vect\{(1,0,-1,0),(0,-1,-1,1)\}$. *Les deux vecteurs étant libres, il forment donc une base de* $F^{\perp_q}$ *et* $\dim F^{\perp_q} = 2$.

(c) *La forme quadratique* q *est dégénérée car* $\dim F + \dim F^{\perp_q} = 5 \neq \dim \mathbb{R}^4$.

(d) *Appliquons la méthode de Gauss pour décomposer* q *en combinaison linéaire de carrées de formes linéaires :*

$$\begin{aligned} q(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (x_1+x_3+x_4)^2 - (x_3+x_4)^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_4 \\ &= (x_1+x_3+x_4)^2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_4 \\ &= (x_1+x_3+x_4)^2 + (x_2+x_3+x_4)^2 - (-x_2+x_3-x_4)^2 \\ &= \ell_1(x_1,x_2,x_3,x_4)^2 + \ell_2(x_1,x_2,x_3,x_4)^2 - \ell_3(x_1,x_2,x_3,x_4)^2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \ell_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1 + x_3 + x_4 \\ \ell_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_2 + x_3 + x_4 \\ \ell_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= -x_2 + x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Ces trois formes linéaires sont linéairement indépendantes.

On en déduit que q *est de signature* $(2,1)$ *et de rang 3.*

(e) *Soit* $\mathcal{B}_0^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ *la base duale de* $\mathcal{B}_0$ *(base formées de formes coordonnées). Alors*

$$\begin{aligned} \ell_1 &= e_1^* + e_3^* + e_4^* \\ \ell_2 &= e_2^* + e_3^* + e_4^* \\ \ell_3 &= -e_2^* + e_3^* - e_4^* \end{aligned}$$

La famille (ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3) *est une famille libre de* E^*. *On peut la compléter par* e_4^* *de sorte que* $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,e_4^*)$ *soit une base* E^*. *Soit* $\mathcal{B} = (w_1,w_2,w_3,w_4)$ *la base préduale de* $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,e_4^*)$, *alors* $\mathcal{B}$ *est une base* q*-orthogonale de* E. *Déterminons la. Soit*

$$Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0^*}(\ell_1,\ell_2,\ell_3,e_4^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

elle est bien inversible (de déterminant 2). Si P *est la matrice de passage de* $\mathcal{B}_0$ *à* $\mathcal{B}$, *alors* $P = {}^tQ^{-1}$. *On trouve après calculs*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$w_1 = (1,0,0,0,),\ w_2 = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),\ w_3 = (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),\ w_4 = (-1,-1,0,1).$$

(f) La matrice de q dans la base $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ est donc

$$^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit E un espace préhilbertien réel munit du produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ et $a \in E$ un vecteur de nome 1. On définit l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle + \lambda\langle x, a\rangle\langle a, y\rangle$$

où λ est un nombre réel non nul.

(a) Montrer que si φ est un produit scalaire alors $1 + \lambda > 0$.

(b) Réciproquement, montrer que si $1 + \lambda > 0$, alors φ est un produit scalaire. (On distinguera le cas où $\lambda \geq 0$ et le cas où $-1 < \lambda < 0$ et dans ce dernier cas on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

[Barème. (a):2, (b):2]

Corrigé. Il est claire que φ est une fbs sur E.
Pour tout $x \in E$, on a

$$\varphi(x, x) = \|x\|^2 + \lambda\langle x, a\rangle^2.$$

En particulier

$$\varphi(a, a) = \|a\|^2 + k\langle a, a\rangle^2 = \|a\|^2 + \lambda\|a\|^4 = 1 + \lambda.$$

Pour que φ soit définie positive, il est nécessaire que $1 + \lambda > 0$.

Inversement, supposons que $1 + \lambda > 0$, c-à-d. $\lambda \in]-1, +\infty[$.

– Si $\lambda \geq 0$, alors pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq \|x\|^2$ et si $x \neq 0$, alors $\varphi(x, x) > 0$. Donc dans ce cas la fbs φ est définie positive.

– Si $-1 < \lambda < 0$, alors en posant $\lambda = -\alpha$, on a $0 < \alpha < 1$ et pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x, x) = \|x\|^2 - \alpha\langle x, a\rangle^2$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle x, a\rangle^2 \leq \|x\|^2\|a\|^2 = \|x\|^2,$$

donc

$$\varphi(x, x) \geq \|x\|^2 - \alpha\|x\|^2 = (1 - \alpha)\|x\|^2 \geq 0$$

et si $x \neq 0$, alors $\varphi(x, x) > 0$. Dans ce cas aussi la fbs est définie positive.
