Algèbre bilinéaire

Contrôle Continu du 02/04/2015

Exercice 1. Réduire les formes quadratiques suivantes, et déterminer dans chaque cas, la signature, le rang et le noyau :

(a) Dans $\mathbb{R}^4$, $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + (4+a)x_2^2 + (1+4a)x_3^2 + ax_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4(1-a)x_2x_3 + 2ax_2x_4 + (1-4a)x_3x_4$.

(b) Dans $\mathbb{R}^5$, $q(\mathbf{x}) = \sum_{1\le i<j\le 5} x_ix_j$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n $(n \geq 1)$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\beta(P,Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt \quad \text{et} \quad \mathrm{q(P,P)} = \beta(\mathrm{P,P}).$$

(a) Montrer que β est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique? antisymétrique?

(b) Montrer que q est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire, que l'on notera φ. La forme φ est-il un produit scalaire?

(c) On suppose dorénavant $n = 2$.

(i) Ecrire la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_2 = (1, X, X^2)$.

(ii) Réduire la forme q, en déduire sa signature.

(iii) Déterminer une base q-orhogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré ≤ 3 munit de son produit scalaire canonique $\langle \sum_{i=0}^3 a_iX^i | \sum_{i=0}^3 b_iX^i \rangle = \sum_{i=0}^3 a_ib_i$.

Soit H l'hyperplan définit par $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X];\ P(1) = 0\}$.

(a) Déterminer une base de H.

(b) Déterminer une base orthonormée de H (utiliser le procédé de Gram-Schmidt).

(c) Soit le polynôme $R(X) = X$. Déterminer la projection orthogonale de R sur H, puis calculer la distance de R à H.

Exercice 4. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace vectoriel euclidien E telle que

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle e_k \mid x\rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.