Algèbre bilinéaire

Contrôle Continu du 02/04/2015
Correction

$\boxed{6}$ **Exercice 1.** Réduire les formes quadratiques suivantes, et déterminer dans chaque cas, la signature, le rang et le noyau :

(a) Dans $\mathbb{R}^4$, $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + (4+a)x_2^2 + (1+4a)x_3^2 + ax_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4(1-a)x_2x_3 + 2ax_2x_4 + (1-4a)x_3x_4$.

(b) Dans $\mathbb{R}^5$, $q(\mathbf{x}) = \sum_{1\leq i<j\leq 5} x_ix_j$.

Réponse. *(a) On a*

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= x_1^2 + 4x_1x2 + 2x_1x_3 + \textit{termes ne contenant pas } x_1 \\ &= (x_1+2x_2+x_3)^2 - (2x_2+x_3)^2 + \textit{termes ne contenant pas } x_1 \\ &= \ell_1^2(\mathbf{x}) + ax_2^2 + 4ax_3^2 + ax_4^2 - 4ax_2x_3 + 2ax_2x_4 + (1-4a)x_3x_4 \end{aligned}$$

avec $\ell_1(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + x_3$. *Ensuite on fait la même chose pour la variable* x_2. *On a alors*

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= \ell_1^2(\mathbf{x}) + a(x_2 - 2x_3 + x_4)^2 - a(-2x_3+x_4)^2 + \textit{termes ne contenant pas } x_2 \\ &= \ell_1^2(\mathbf{x}) + a\ell_2^2(\mathbf{x}) + x_3x_4 \end{aligned}$$

avec $\ell_2(\mathbf{x}) = x_2 - 2x_3 + x_4$. *Enfin on trouve*

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= \ell_1^2(\mathbf{x}) + a\ell_2^2(\mathbf{x}) + \tfrac{1}{4}(x_3+x_4)^2 - \tfrac{1}{4}(x_3-x_4)^2 \\ &= \ell_1^2(\mathbf{x}) + a\ell_2^2(\mathbf{x}) + \tfrac{1}{4}\ell_3^2(\mathbf{x}) - \tfrac{1}{4}\ell_4^2(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

avec $\ell_3(\mathbf{x}) = x_3 + x_4$ *et* $\ell_4(\mathbf{x}) = x_3 - x_4$.

Les formes linéaires $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ *étant linéairement indépendantes on a bien une réduction de Gauss de la forme quadratique* q. *On en déduit que :*

– si $a = 0$, *la forme quadratique* q *est de signature* $(2,1)$ *de rang 3 et de noyau la droite vectorielle engendré par* $(-2,1,0,0)$.

– si $a > 0$, *la forme quadratique* q *est de signature* $(3,1)$ *de rang 4 et son noyau est nul.*

– si $a < 0$, *la forme quadratique* q *est de signature* $(2,2)$ *de rang 4 et son noyau est nul.*

(b) On a

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 \\ &= (x_1+A)(x_2+B) - AB + \textit{terme ne contenant ni } x_1 \textit{ ni } x_2 \end{aligned}$$

On trouve assez facilement $A = B = x_3 + x_4 + x_5$, donc

$$\begin{array}{ll} q(\mathbf{x}) & = (x_1 + x_3 + x_4 + x_5)(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - (x_3 + x_4 + x_5)^2 \\ & \qquad + \text{terme ne contenant ni } x_1 \text{ ni } x_2 \\ & = (x_1 + x_3 + x_4 + x_5)(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5 \\ & = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5 \\ & = \frac{1}{4}\ell_1^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{4}\ell_2^2(\mathbf{x}) - (x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5)^2 + (\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5)^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_4x_5 \end{array}$$

avec $\ell_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5$ et $\ell_2(\mathbf{x}) = x_1 - x_2$. Ensuite on développe et on regroupe

$$q(\mathbf{x}) \quad = \frac{1}{4}\ell_1^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{4}\ell_2^2(\mathbf{x}) - \ell_3^2(\mathbf{x}) - \frac{3}{4}x_4^2 - \frac{3}{4}x_5^2 - \frac{1}{2}x_4x_5$$

avec $\ell_3^2(\mathbf{x}) = x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5$. Finalement, on a

$$\begin{array}{ll} q(\mathbf{x}) & = \frac{1}{4}\ell_1^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{4}\ell_2^2(\mathbf{x}) - \ell_3^2(\mathbf{x}) - \frac{3}{4}(x_4 + \frac{1}{3}x_5)^2 - \frac{2}{3}x_5^5 \\ & = \frac{1}{4}\ell_1^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{4}\ell_2^2(\mathbf{x}) - \ell_3^2(\mathbf{x}) - \frac{3}{4}\ell_4^2(\mathbf{x}) - \frac{2}{3}\ell_5^2(\mathbf{x}) \end{array}$$

avec $\ell_4(\mathbf{x}) = x_4 + \frac{1}{3}x_5$ et $\ell_5(\mathbf{x}) = x_5$.
Il est clair que les formes linéaires $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$ sont linéairement indépendantes, donc on a bien une réduction de Gauss de la forme quadratique q. Elle est de signature $(1, 4)$, son rang est 5 et son noyau est nul.

$\boxed{10}$ **Exercice 2.** Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n ($n \geq 1$). Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\beta(P, Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt \quad \text{et} \quad \mathrm{q(P,P) = \beta(P,P)}.$$

(a) Montrer que β est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique? antisymétrique?

(b) Montrer que q est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire, que l'on notera φ. La forme φ est-il un produit scalaire?

(c) On suppose dorénavant $n = 2$.
(i) Ecrire la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_2 = (1, X, X^2)$.

(ii) Réduire la forme q, en déduire sa signature.

(iii) Déterminer une base q-orhogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Réponse.*(a) On remarque que*

$$\beta(1, X) = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \beta(X, 1) = \int_0^1 t^2 \times 0dt = 0.$$

Donc β n'est ni symétrique, ni antisymétrique.
Pour montrer que β est bilinéaire, Il faut donc vérifier la linéarité par rapport aux deux places, ce qui est facile à faire.

(b) Notons φ la forme polaire de q. On a donc

$$\varphi(P,Q)=\frac{1}{2}(\beta(P,Q)+\beta(Q,P))=\frac{1}{2}\int_0^1 t(P(t)Q'(t)+P'(t)Q(t))dt$$

La forme φ n'est pas un produit scalaire, puisque la forme quadratique associée q n'est pas définie, en effet

$$q(1)=\varphi(1,1)=\beta(1,1)=\int_0^1 t\times 0dt=0.$$

(c) (i) Il est facile de montrer que la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_2=(1,X,X^2)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

donc $q(a+bX+cX^2)=\frac{1}{3}b^2+\frac{2}{5}c^2+\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}ac+\frac{3}{4}bc$

(ii) Réduction de Gauss de q. On a

$$\begin{aligned}
q(a+bX+cX^2) &= \tfrac{1}{3}b^2+\tfrac{2}{5}c^2+\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{2}{3}ac+\tfrac{3}{4}bc\\
&= \tfrac{1}{3}(b^2+\tfrac{3}{2}b(a+\tfrac{3}{2}c))+\tfrac{2}{3}ac+\tfrac{2}{5}c^2\\
&= \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{4}a+b+\tfrac{9}{8}c)^2-\tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{4}a+\tfrac{9}{8}c)^2+\tfrac{2}{3}ac+\tfrac{2}{5}c^2\\
&= \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{4}a+b+\tfrac{9}{8}c)^2-\tfrac{3}{16}a^2-\tfrac{27}{64}c^2-\tfrac{9}{16}ac+\tfrac{2}{3}ac+\tfrac{2}{5}c^2\\
&= \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{4}a+b+\tfrac{9}{8}c)^2-\tfrac{7}{320}c^2+\tfrac{5}{48}ac-\tfrac{3}{16}a^2\\
&= \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{4}a+b+\tfrac{9}{8}c)^2-\tfrac{3}{16}(a^2-\tfrac{5}{9}ac)-\tfrac{7}{320}c^2\\
&= \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{4}a+b+\tfrac{9}{8}c)^2-\tfrac{3}{16}(a-\tfrac{5}{18}c)^2+\tfrac{25}{1728}c^2-\tfrac{7}{320}c^2\\
&= \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{4}a+b+\tfrac{9}{8}c)^2-\tfrac{3}{16}(a-\tfrac{5}{18}c)^2-\tfrac{1}{135}c^2
\end{aligned}$$

Les trois formes linéaires $\ell_1(P)=\frac{3}{4}a+b+\frac{9}{8}c$, $\ell_2(P)=a-\frac{5}{18}c$ et $\ell_3(P)=c$ (avec $P=a+bX+cX^2$) sont linéairement indépendantes, on a bien une réduction de Gauss de la forme quadratique q. Sa signature est $(1,2)$ (ni positive, ni négative).

(iii) La famille $\mathcal{B}^\star=(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ est une base de $(\mathbb{R}_2[X])^\star$. Pour déterminer une base q-orthogonale, il suffit de déterminer la base préduale de $\mathcal{B}^\star$. Soit $\mathcal{B}=(P_1,P_2,P_3)$ cette base. On note $\mathcal{B}_0=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}_0^\star$ sa base duale. Alors $Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})={}^t(Mat_{\mathcal{B}_0^\star}(\mathcal{B}^\star))^{-1}$. Il sagit donc de calculer l'inverse de la transposée de la matrice

$$Q=Mat_{\mathcal{B}_0^\star}(\mathcal{B}^\star)=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{9}{8} & -\frac{5}{18} & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve

$${}^tQ^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{5}{18} \\ 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $P_1(X)=X$, $P_2(X)=1-\frac{3}{4}X$, $P_3(X)=\frac{5}{18}-\frac{4}{3}X+X^2$

$\boxed{6}$ **Exercice 3.** Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré ≤ 3 munit de son produit scalaire canonique $\langle \sum_{i=0}^{3} a_i X^i | \sum_{i=0}^{3} b_i X^i \rangle = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i$.

Soit H l'hyperplan définit par $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X];\ P(1) = 0\}$.

(a) Déterminer une base de H.

(b) Déterminer une base orthonormée de H (utiliser le procédé de Gram-Schmidt).

(c) Soit le polynôme $R(X) = X$. Déterminer la projection orthogonale de R sur H, puis calculer la distance de R à H.

Réponse. *(a) Soit* $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in H$, *alors* $0 = P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ *et* $a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$. *Ainsi* $P = a_1(X-1) + a_2(X^2-1) + a_3(X^3-1)$. *La famille* $(X-1, X^2-1, X^3-1)$ *est donc une famille génératrice de* H *et comme les degrés de ces polynômes forment une suite strictement croissante, elle est libre. Ainsi* $\mathcal{B} = (R_1 = X-1, R_2 = X^2-1, R_3 = X^3-1)$ *est une base de* H.

(b) Procédé de Gram-Schmidt appliqué à (R_1, R_2, R_3) *:*

$\rightarrow$ *On a* $U_1 = R_1$ *et* $\|U_1\|^2 = \|R_1\|^2 = 1 + 1 = 2$, *donc* $\boxed{P_1 = \frac{U_1}{\|U_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)}$.

$\rightarrow$ *On a* $U_2 = R_2 - \langle R_2|P_1\rangle P_1 = X^2 - 1 - \langle X^2 - 1|\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)\rangle(\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)) = X^2 - 1 - \frac{1}{2}(X-1) = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$ *et* $\|U_2\|^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$. *Ainsi* $\boxed{P_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|} = \sqrt{\frac{2}{3}}(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2})}$.

$\rightarrow$ *On a* $U_3 = R_3 - \langle R_3|P_2\rangle P_2 - \langle R_3|P_1\rangle P_1$. *Avec*
$\langle R_3|P_2\rangle P_2 = \frac{2}{3}\langle X^3 - 1|X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\rangle(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2})$ *et*
$\langle R_3|P_1\rangle P_1 = \frac{1}{2}\langle X^3 - 1|X - 1\rangle(X-1) = \frac{1}{2}(X-1)$. *Donc*
$U_3 = X^3 - 1 - \frac{1}{3}(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(X-1) = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$ *et* $\|U_3\|^2 = 1 + \frac{3}{9} = \frac{4}{3}$.
Anisi $\boxed{P_3 = \frac{U_3}{\|U_3\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}(X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3})}$.

On en déduit que (P_1, P_2, P_3) *est une base orthonormée de* H.

(c) Soit R *le polynôme* $R(X) = X$. *Comme* (P_1, P_2, P_3) *est une base orthonormée de* H, *sa projection orthogonale sur* H *est donnée par*

$$p_H(R) = \sum_{i=1}^{3} \langle R|P_i\rangle P_i = -\frac{1}{4}(X^3 + X^2 - 3X + 1).$$

Par conséquent

$$d(R,H)^2 = \|R - p_H(R)\|^2 = \|R\|^2 - \|p_H(R)\|^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

D'où $d(X,H) = \frac{1}{2}$.

$\boxed{4}$ **Exercice 4.** Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace vectoriel euclidien réel E telle que

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x\rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Réponse. *On va d'abord monter que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre et pour cela, il suffit de montrer que ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux (la famille serait donc une famille orthonormée). Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $1 = \|e_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | e_k \rangle^2 = \langle e_k | e_k \rangle^2 + \sum_{i \neq k} \langle e_i | e_k \rangle^2 = 1 + \sum_{i \neq k} \langle e_i | e_k \rangle^2$. Donc $\sum_{i \neq k} \langle e_i | e_k \rangle^2 = 0$ et $\langle e_i | e_k \rangle = 0$ pour tout $i \neq k$. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est donc orthonormée et par conséquent c'est une famille libre de E (toute famille orthogonale est libre). Il reste maintenant à montrer que cette famille est génératrice. Soit $x \in E$ et posons $y = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | x \rangle e_i$. On a*

$$\begin{array}{ll} \|x - y\|^2 & = \langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | x \rangle e_i | x - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | x \rangle e_i \rangle \\ & = \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | x \rangle^2 + \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | x \rangle^2 \\ = 0 & \end{array}$$

Donc $x = y = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | x \rangle e_i$ et par conséquent $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice dans E. On en déduit que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base (orthonormée) de E et que la dimension de E est n.