Algèbre bilinéaire

Contrôle Continu du 29/03/2018

Epreuve de 2 heures

Calculatrice et documents non autorisés.

Exercice 1.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ de base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Dans cette base, on considère les vecteurs suivants

$$v_1 = (1, 0, 0, 0),\ v_2 = (1, 0, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, 0, 1),$$

et on note $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

1. On munit E de son produit scalaire usuel $\langle x\,, y\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$.
   (a) Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.
   (b) Déterminer une base orthonormée de F.
   (c) Déterminer, dans la base $\mathcal{B}_0$, la matrice de la projection orthogonale p_F sur F.
   (d) En déduire la matrice, dans la base $\mathcal{B}_0$, de la symétrie orthogonale $s_{F^\perp}$ par rapport à $F^\perp$.
   (e) Soit $v = (1, 1, 0, 0)$.
   Déterminer la projection orthogonale de v sur F et sur $F^\perp$.
   En déduire $d(v, F)$ et $d(v, F^\perp)$.

2. On considère la forme quadratique q sur E définie par

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4,$$

   où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
   (a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$, qu'on notera A.
   (b) Déterminer l'orthogonal de F pour q. Quelle est sa dimension?
   (c) Donner une réduction de Gauss de la forme quadratique q.
   Déterminer alors sa signature, son rang et son noyau.
   (d) Déterminer une base de E qui soit q-orthogonale.

Corrigé.

1. (a) *Il est facile de vérifier que la famille* (v_1, v_2, v_3) *est libre.*

   (b) *On applique le procédé de Gram-Schmidt à la famille libre* (v_1, v_2, v_3). *On trouve alors la famille orthonormée* (f_1, f_2, f_3) *où* $f_1 = e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 = e_3 = (0, 0, 1, 0)$ *et* $f_3 = e_4 = (0, 0, 0, 1)$, *qui est une bon de* F.

   (c) *Si* $x = \sum_1^4 x_i e_i$, *On a pour tout* $x \in E$,

$$\begin{aligned} p_F(x) &= \langle x|f_1\rangle f_1 + \langle x|f_2\rangle f_2 + \langle x|f_3\rangle f_3 \\ &= \langle x|e_1\rangle e_1 + \langle x|e_3\rangle e_3 + \langle x|e_4\rangle e_4 \end{aligned}$$

   Donc xi $x = \sum_1^4 x_i e_i$, *alors*

$$p_F(x) = x_1 e_1 + x_3 e_3 + x_4 e_4$$

   D'où

$$Mat_{\mathcal{B}_0}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (d) *On* $s_{F^\perp} = 2p_{F^\perp} - Id = Id - 2p_F$, *Donc*

$$Mat_{\mathcal{B}_0}(s_{F^\perp}) = I_4 - 2Mat_{\mathcal{B}_0}(p_F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (e) *Soit* $v = (1, 1, 0, 0)$. *Il est claire que* $p_F(v) = e_1 = (1, 0, 0, 0)$. *Donc* $p_{F^\perp}(v) = (Id - p_F)(v) = v - e_1 = e_2 = (0, 1, 0, 0)$.
   On en déduit que

$$\begin{aligned} d(v, F) &= \|v - p_F(v)\| = \|p_{F^\perp}(v)\| = 1 \\ d(v, F^\perp) &= \|v - p_{F^\perp}(v)\| = \|p_F(v)\| = 1 \end{aligned}$$

2. (a) *On a*

$$A := Mat_{\mathcal{B}_0}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) *Soit* $x \in E$. *On a*

$$x \in F^{\perp_q} \iff \left\{ \begin{array}{c} x \perp_q f_1 \\ x \perp_q f_2 \\ x \perp_q f_3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x \perp_q e_1 \\ x \perp_q e_3 \\ x \perp_q e_4 \end{array} \right.$$

$$
\begin{aligned}
& (x_1,x_2,x_3,x_4)A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=0,\\
\iff \qquad & (x_1,x_2,x_3,x_4)A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=0,\\
& (x_1,x_2,x_3,x_4)A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=0
\end{aligned}
$$

Donc

$$x\in F^{\perp_q} \iff \begin{cases} x_1+x_3+x_4 & =0\\ x_1+x_2 & =0\end{cases}$$

On peut écrire par exemple $x_2=-x_1$ *et* $x_3=-x_1-x_4$*, donc* $x=x_1(1,-1,0,0)+x_4(0,0,-1,1)$*. Par conséqent*

$$F^{\perp_q}=\mathrm{Vect}((1,-1,-1,0),(0,0,-1,1)),\quad \dim F^{\perp_q}=2.$$

(c) On a

$$
\begin{aligned}
q(x) &= x_1^2+x_2^2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4\\
&= x_1^2+2x_1(x_3+x_4)+x_2^2+2x_2x_3+2x_2x_4\\
&= (x_1+x_3+x_4)^2-(x_3+x_4)^2+x_2^2+2x_2x_3+2x_2x_4\\
&= (x_1+x_3+x_4)^2+x_2^2+2x_2(x_3+x_4)-x_3^2-x_4^2-2x_3x_4\\
&= (x_1+x_3+x_4)^2+(x_2+x_3+x_4)^2-2(x_3+x_4)^2\\
&= \ell_1^2(x)+\ell_2^2(x)-2\ell_3^2(x)
\end{aligned}
$$

Donc $\mathrm{sign}(q)=(2,1)$ *et* $\mathrm{rang}(q)=3$ *et* $\mathbf{Ker}(q)=\mathbb{R}(0,0,-1,1)$.

(d) La famille (ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3) *est libre dans* E^* *qui de dimension 4. On complète cette famille par la forme* $\ell_4(x)=x_4$ *de sorte que* $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$ *soit une base de* E^*.
La base préduale ce cette base est une base q*-orthogonale de* E*. Pour la déterminer il suffit de calculer* $(Q^{-1})^T$*, où*

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

On trouve

$$(Q^{-1})^T=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Par conséquent les vecteurs

$$w_1 = (1,0,0,0), w_2 = (0,1,0,0), w_3 = (-1,-1,1,0), w_4 = (0,0,-1,1)$$

forment une base q-orthogonale de E

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de dégré ≤ 2. On définit sur $E \times E$ l'application suivante

$$(P,Q) \mapsto \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

(a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

(b) Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(1, X)$.

(c) Soit le polynôme $Q(X) = X^2$. Déterminer la projection orthogonale de Q sur F.

(d) En déduire la valeur de

$$m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - a - bx)^2 dx.$$

Corrigé.

1. *Il est facile de montrer que l'application proposée est un produit scalaire sur E.*

2. *Pour déterminer une b.o.n. de F il suffit d'orthonormaliser la base $(1, X)$ par rapport à φ :*

   On a

   - $P_0 = \frac{Q_0}{\|Q_0\|}$ *où* $Q_0 = 1$*. On a* $\|Q_0\|^2 = \int 1dt = 1$*. Donc*

   $$P_0 = 1.$$

   - $P_1 = \frac{Q_1}{\|Q_1\|}$ *où* $Q_1 = X - \varphi(X, P_0)P_0 = X - (\int_0^1 tdt) \times 1 = X - \frac{1}{2}$*. Donc* $\|Q_1\|^2 = \varphi(Q_1, Q_1) = \varphi(Q_1, X) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})tdt = \frac{1}{12}$*. D'où*

   $$P_1 = \frac{Q_1}{\|Q_1\|} = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2X - 1)$$

   Ainsi (P_0, P_1) *est une bon de F par rapport à φ.*

3. *Soit* $Q(X) = X^2$. *On a*

$$p_F(Q) = \varphi(Q, P_0)P_0 + \varphi(Q, P_1)P_1$$

de plus

$$\begin{array}{ll} \varphi(Q, P_0) & = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \\ \varphi(Q, P_1) & = \sqrt{3}\int_0^1 t^2(2t-1)dt = \sqrt{3}(2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{array}$$

donc

$$p_F(Q) = \frac{1}{3}P_0 + \frac{\sqrt{3}}{6}P_1 = \frac{1}{3} + X - \frac{1}{2} = X - \frac{1}{6}$$

4. *On a*

$$m = d(Q, F)^2 = \|Q - p_F(Q)\|^2 = \|X^2 - X + \frac{1}{6}\|^2 = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt$$

soit après calculs

$$m = \frac{1}{180}.$$