Algèbre bilinéaire – Feuille 7

Endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien

Exercice 1. Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité:

$$\forall x, y \in E, \langle x|y\rangle = 0 \implies \langle u(x)|u(y)\rangle = 0$$

(a) Calculer $\langle x + y|x - y\rangle$ pour x, y vecteurs unitaires.
(b) Établir qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \alpha\|x\|$$

(c) Conclure qu'il existe $v \in \mathcal{O}(E)$ vérifiant $u = \alpha v$.

Exercice 2. Dans un espace euclidien E, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième:

(i) u est une isométrie vectorielle;

(ii) $u^2 = -\,\mathbf{Id}$;

(iii) $u(x)$ est orthogonal à x pour tout x.

Exercice 3. (a) Trouver les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer qu'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
(a) Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A alors $|\lambda| = 1$.
(b) Soit λ une valeur propre complexe non réelle de A et $Z = X + iY \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. Montrer que $\text{Vect}(X, Y)$ est stable par A.
(c) Montrer que les colonnes X et Y ont alors même norme et sont orthogonales.
Quelle est la nature de l'endomorphisme induit par la matrice A sur l'espace $\text{Vect}(X, Y)$?

Exercice 5. Déterminer les applications $u \in \mathcal{O}(E)$ vérifiant $(u - \mathbf{Id})^2 = 0$

Exercice 6. Quels sont les automorphismes orthogonaux symétriques d'un espace vectoriel euclidien E?

Exercice 7. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que les espaces $\mathbf{Im}\, u$ et $\mathbf{Ker}\, u$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 8. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel avec $k \neq -1$.
(a) Montrer que

$$u(x) = x + k\langle x|a\rangle a$$

définit un endomorphisme symétrique de E.
(b) Montrer que u est un automorphisme.
(c) Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

Exercice 9. Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que la projection p est orthogonale si, et seulement si, p est symétrique.

Exercice 10. Soit p une projection orthogonal d'un espace vectoriel euclidien E et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de E. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \|p(e_k)\|^2 = \text{rang}(p)$$

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension non nulle. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E.

(a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique. En déduire que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont compris entre 0 et 1.

(b) Montrer que

$$(\mathbf{Im}\, p + \mathbf{Ker}\, q)^{\perp} = \mathbf{Im}\, q \cap \mathbf{Ker}\, p$$

(c) En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont compris entre 0 et 1.

Exercice 12. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité et rangées en ordre croissant.
Montrer

$$\forall x \in E, \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x)|x\rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$$

Exercice 13. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E.
On pose

$$k = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$$

Vérifier

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq k\|x\|$$

Exercice 14. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A^2$.

(a) Montrer que $A^3 = I_n$ et que A est orthogonale.

(b) Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.
Montrer que le noyau de $u^2 + u + \mathbf{Id}$ est de dimension paire et en déduire la forme de la matrice de u dans une base bien choisie.

Exercice 15. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A^3 = A\,{}^tA$$

Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 16. On étudie l'équation $M\,{}^tMM = I_n$ d'inconnue $M \in M_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'une solution est une matrice symétrique.

(b) En déduire les solutions de l'équation étudiée.

Exercice 17. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.
On suppose que A nilpotente. Montrer que A est la matrice nulle.

Exercice 18. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA\,A = A\,{}^tA$. On suppose que A est nilpotente.

(a) Montrer que ${}^tAA = 0$.

(b) En déduire que $A = 0$.

Exercice 19. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(a) Justifier que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable.

(b) Montrer que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(c) Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille orthonormée de colonnes telle que la famille $(AX_i)_{1\leq i\leq n}$ soit orthogonale.
Montrer que les X_i sont des vecteurs propres de ${}^tAA$.

On suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(d) Établir que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(e) Montrer qu'il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = {}^tAA$.

(f) Conclure (décomposition de Cartan) :

$$\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \exists (O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), A = OS$$

(g) Établir l'unicité de cette écriture.

Exercice 20. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont orthogonalement semblable *i.e.*

$$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), {}^t\Omega({}^tAA)\Omega = A\,{}^tA.$$

Exercice 21. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\mathrm{Sp}\left(\{{}^tAA - A\,{}^tA\right) \subset \mathbb{R}_+$$

Montrer que A et ${}^tA$ commutent.
Exercice 22. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Justifiez que la matrice A est est diagonalisable et trouver P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.
Exercice 23. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Justifiez que la matrice A est est diagonalisable et trouver P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.
Exercice 24. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M + {}^tM$ soit nilpotente.
Montrer que M est antisymétrique.
Exercice 25. Soit A une matrice réelle antisymétrique.
(a) Quelle est la seule valeur propre réelle possible de A.
A quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
(b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in i\mathbb{R}$.
Exercice 26. (a) Si A est une matrice antisymétrique réelle, que peut-on dire des valeurs propres complexes de A?
(b) Soit

$$\varphi \colon A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$

Montrer que φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur

$$\{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \mathrm{Sp}(\Omega)\}$$

Exercice 27. Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant

$$A^tA = {}^tAA$$

Montrer que la matrice ${}^tA^{-1}A$ est orthogonale.
Exercice 28. Soient a, b, c trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et

$$M = \begin{pmatrix} \langle a|a\rangle & \langle a|b\rangle & \langle a|c\rangle \\ \langle b|a\rangle & \langle b|b\rangle & \langle b|c\rangle \\ \langle c|a\rangle & \langle c|b\rangle & \langle c|c\rangle \end{pmatrix}$$

Montrer que M diagonalisable, de valeurs propres positives et $\det M \geq 0$.
Exercice 29. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = {}^tBB$$

Exercice 30. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On veut montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que

$$B^2 = A$$

(a) Prouver l'existence.
On considère maintenant $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$.
(b) Établir par le lemme de décomposition des noyaux que pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbf{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_n) = \mathbf{Ker}(A - \lambda I_n)$$

(c) Montrer aussi

$$\mathbf{Ker}\, B = \mathbf{Ker}\, A$$

(c) Conclure l'unicité.
Exercice 31. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Sp}A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose

$$AB + BA = 0$$

Montrer $AB = BA = 0$.