Algèbre bilinéaire – Feuille 6

Endomorphismes orthogonaux en dimension 3

Exercice 1. Déterminer la nature de l'endomorphisme f de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté, dont la matrice A relativement à une b.o.n. (e_1, e_2, e_3) est donnée ci-après, et préciser les éléments caractéristiques de f.

(a) $-\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 2 & -26 & 7 \\ -23 & 2 & 14 \\ 14 & 7 & 22 \end{pmatrix}$ $\quad(b)$ $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad(d)$ $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 4 & 8 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

(e) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad(f)$ $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & -8 & -1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad(h)$ $\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad(j)$ $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a, b, c) \neq 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Exercice 2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien, $f \neq Id$. Montrer que f est une rotation si, et seulement si, il existe un vecteur unitaire u et un réel $\theta \in]-\pi, \pi[$, tel que pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \cos(\theta)x + (1 - \cos(\theta))\langle u|x\rangle u + \sin(\theta)(u \wedge x)$$

Dans ce cas f est la rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle θ.

Exercice 3. Soit f la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé et orienté par le vecteur $(1, 1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.

Réponse.

1. (a) Rotation d'axe dirigé et orienté par $(7,7,-3)$ et d'angle $\arccos(-\frac{53}{54})[2\pi]$.

(b) Rotation d'axe dirigé et orienté par $(1,2,-2)$ et d'angle $\pi[2\pi]$ = retournement (ou demi-tour) autour de la droite engendrée par $(1,2,-2)$.

(c) Réflexion par rapport au plan d'équation $x-2y-2z=0$.

(d) Composée commutative de la rotation d'axe dirigé et orienté par $(1,0,-4)$ et d'angle $-\arccos(\frac{8}{9})[2\pi]$ et de la réflexion par rapport au plan d'équation $x-4z=0$.

(e) Composée commutative de la rotation d'axe dirigé et orienté par $(0,1,2)$ et d'angle $-\arccos(\frac{2}{3})[2\pi]$ et de la réflexion par rapport au plan d'équation $y+2z=0$.

(f) Rotation d'axe dirigé et orienté par $(4,-1,1)$ et d'angle π = retournement (ou demi-tour) autour de la droite engendrée par $(4,-1,1)$.

(g) $-A$ est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $(1,1,1)$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

(h) $4\times$Rotation d'axe dirigé et orienté par $(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

(i) Réflexion par rapport au plan d'équation $x-y-z=0$.

(j) Réflexion par rapport au plan d'équation $3x-2y+z=0$.

(k) Rotation d'axe dirigé et orienté par (a,b,c) et d'angle $\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

3. Construire une b.o.n. $\mathcal{B}$ à partir de $(1,1,1)$, écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et utiliser la formule de changement de bases. On trouve

$$A=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}-\sqrt{3}-1 & \sqrt{2}+\sqrt{3}-1 \\ \sqrt{2}+\sqrt{3}-1 & 2+\sqrt{2} & \sqrt{2}-\sqrt{3}-1 \\ \sqrt{2}-\sqrt{3}-1 & \sqrt{2}+\sqrt{3}-1 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$