Algèbre bilinéaire – Feuille 5

Adjoint d'un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$F \text{ est stable par } u \text{ si, et seulement si, } F^{\perp} \text{ est stable par } u^*.$$

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel euclidien et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes symétriques.. Montrer que

$$u \circ v \text{ est symétrique si, et seulement si, } u \circ v = v \circ u.$$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer que

$$\mathbf{Ker}\, u^* = (\mathbf{Im}\, u)^{\perp} \text{ et } \mathbf{Im}\, u^* = (\mathbf{Ker}\, u)^{\perp}$$

(b) On suppose que $u^2 = 0$.

- Montrer que

$$\mathbf{Ker}(u + u^*) = \mathbf{Ker}\, u \cap \mathbf{Ker}\, u^*$$

- Etablir

$$u + u^* \text{ inversible } \iff \mathbf{Ker}\, u = \mathbf{Im}\, u$$

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer que

$$\mathbf{Ker}\, u = \mathbf{Ker}(u^* \circ u) \text{ et } \mathbf{Im}\, u^* = \mathbf{Im}(u^* \circ u)$$

(b) En déduire que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{rang}({}^t\!AA) = \mathrm{rang}(A\,{}^t\!A) = \mathrm{rang}(A)$$

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P; Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. A tout $P \in E$ on associe le polynôme

$$\varphi(P) = (X^2 - X)P'' + (2X - 1)P' = ((X^2 - X)P')'.$$

(a) Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de E.

(b) Déterminer la matrice représentant φ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de E.
Qu'en déduisez-vous pour $\mathcal{B}_0$?