Algèbre bilinéaire – Feuille 3

Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 2. Montrer que

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur l'espace $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f,g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_{0}^{1} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 4. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Pour $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$$

A quelle(s) condition(s) sur a,b,c,d a-t-on φ produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. n étant un entier naturel non nul, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$P : x \mapsto P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)).$$

(a) Montrer que $\mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

(b) Montrer que si $P \in \mathcal{P}_n$ s'annule en $2n+1$ points deux à deux distincts dans $[-\pi,\pi[$, alors $P = 0$ (utiliser l'expression complexe des fonctions cos et sin).

(c) Montrer que si $x_0,\ldots,x_{2n}$ sont des réels deux à deux distincts dans $[-\pi,\pi[$, alors l'applications

$$(P,Q) \mapsto (P|Q) = \sum_{k=0}^{2n} P(x_k)Q(x_k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{P}_n$.

Exercice 6. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (0,1,1)$.

(a) Verifier que la famille (v_1,v_2,v_3) est libre.

(b) Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de (v_1,v_2,v_3).

Exercice 7. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni de son produit scalaire $(\sum_0^2 a_iX^i | \sum_0^2 b_iX^i) = \sum_0^2 a_ib_i$ et la famille de vecteurs $Q_1 = X^2 - 1$, $Q_2 = 3X + 1$, $Q_3 = X^2 + X$.

(a) Vérifier que la famille (Q_1, Q_2, Q_3) est libre.

(b) Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de (Q_1, Q_2, Q_3).

Exercice 8. (a) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^2 (2-t)P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Donner une base orthonormée.

Exercice 9. Montrer que la famille $\{\cos(nt), \sin(mt) \mid (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\}$ est orthogonale dans l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.

Exercice 10. Etant donné une famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $n+1$ réels deux à deux distincts, on munit $\mathbb{R}_n[x]$ du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto (P|Q) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i).$$

Montrer que la famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ des polynômes (de Lagrange) définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad (0 \leq i \leq n)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 11. (a) Montrer que

$$(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

(c) En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, déduire de la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 12. (a) Montrer que

$$(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$

(c) Soit $P = 1 + X + X^3$. Déterminer la distance de P au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 13. Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (x^2 - ax - b)^2 dx$.

Exercice 14. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)^2$$

Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ constitue une base orthonormée de E.

Exercice 15. Soient E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application.

(a) Supposons que

$$\forall x, y \in E, (f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$$

Montrer que f est un endomorphisme de E.
(b) Supposons que f est surjective et que pour tout $x, y \in E$, on ait

$$(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$$

Montrer que f est un endomorphisme de E.
Exercice 16. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant

$$\forall x, y \in E, x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \lambda \|x\|$$

Exercice 17. Soit $E = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose

$$F = \{f \in E / \forall t \in [-1,0], f(t) = 0\} \text{ et } G = \{g \in E / \forall t \in [0,1], g(t) = 0\}$$

(a) Montrer que $F^\perp = G$.
(b) Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?
Exercice 18. On considère sur l'espace $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle A; B \rangle = \mathbf{tr}({}^tAB)$.
Soit le sous-espace vectoriel

$$F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} ; \; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Trouver une base orthonormée de $F^\perp$
(b) Déterminer la projection orthogonal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$
(c) En déduire $d(A, F)$, la distance de A à F.

Exercice 19. On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x+y+z = 0$.
Exercice 20. On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale sur le plan P d'équation $x = z$.
Exercice 21. Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

Indications – Réponses

1. *Un polynôme de degré* $\leq n$ *et admet* $n+1$ *racines est nul.*

2. *La fonction* $[-1,1] \ni t \mapsto f(t)^2 t(1-t^2)$ *est continue et positive . Ainsi* $f(t)=0$, $\forall t \in]-1,1[$, *ensuite par continuité,* $f(t)=0$, $\forall t \in [-1,1]$.

4. φ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}^2$ *ssi* $a>0$, $ad-b^2>0$ *et* $b=c$.

5. *(a) Il est clair que* $\mathcal{P}_n$ *est un s.e.v. de l'espace vectoriel* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *(des fonctions réelles), engendré par la famille* $B_n=\{c_k, 0\leq k\leq n\}\cup\{s_k, 1\leq k\leq n\}$ *où* c_k *et* s_k *sont les fonctions* $c_k : x\mapsto \cos(kx)$ *et* $s_k : x\mapsto \sin(kx)$. *Ensuite on montre par récurrence (sur n) que la famille* B_n *est libre. On peut aussi montrer que la famille* B_n *est une famille orthogonale et donc libre (voir Exercice* **9.***). On en déduit que* $\dim(\mathcal{P}_n)=2n+1$.
(b) On pose $z=e^{ix}$ *et on écrit* $z^nP(x)$ *comme un polynôme en z de degré* $\leq 2n$.
(c) On vérifie facilement que φ *est une fbs et positive. L'égalité* $\varphi(P,P)=0$, *entraîne que* $P\in\mathcal{P}_n$ *s'annule en* $2n+1$ *points deux à deux distincts.*

6. *Il est facile de vérifier que* (v_1,v_2,v_3) *est libre. Son orthonormalisé de Gram-Schmidt est la famille* (e_1,e_2,e_3) *donnée par* $e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $e_2=\frac{\sqrt{6}}{6}(1,-2,1)$, $e_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)$.

7. *Il est facile de vérifier que* (Q_1,Q_2,Q_3) *est libre. Son orthonormalisé de Gram-Schmidt est la famille* (e_1,e_2,e_3) *donnée par* $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(X^2-1)$, $e_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}}(\frac{1}{2}X^2+3X+\frac{1}{2})$, $e_3=\frac{1}{\sqrt{19}}(3X^2-X+3)$.

8. *(a) La fonction* $t\mapsto 2-t$ *étant à valeurs strictement positive sur* $]0,2[$, *il est facile de vérifier que* $(\cdot|\cdot)$ *est un produit scalaire.*
(b) On utilise l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique $(1,X,X^2)$ *de* $\mathbb{R}_2[X]$. *On trouve la base orthonormée* (e_0,e_1,e_2) *définie par* $e_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $(e_1=\frac{3}{2}X-1$, $e_2=\frac{\sqrt{6}}{4}(5X^2-8X+2)$.

9. *Pour* $n\neq m$ *dans* $\mathbb{N}$, *on a* $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\cos(mt)dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n+m)t)+\cos((n-m)t)dt=0$.
Pour $n\neq m$ *dans* $\mathbb{N}^*$, *on a* $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\sin(mt)dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n-m)t)-\cos((n+m)t)dt=0$.
Pour $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, *on a* $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\sin(mt)dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(n+m)t)+\sin((n-m)t)dt=0$.
Pour $n=0$, *on a* $\int_{-\pi}^{\pi}dt=2\pi$. *Pour* $n\geq 1$ *on a* $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nt)dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(2nt)+1)dt=\pi$ *et* $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nt)dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dt(1-\sin(2nt))dt=\pi$.
On en déduit que la famille $\{\cos(nt),\sin(mt), n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}^*\}$ *est une famille orthogonale et que* $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\}\cup\{\frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin(mt)}{\sqrt{\pi}}, n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}^*\}$ *est une famille orthonormale.*

10 *De la relation* $L_i(x_j)=\delta_{i,j}$, *on montre assez facilement que* $(L_i|L_j)=\delta_{i,j}$, *donc la famille* $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ *est orthonormale de* $\mathbb{R}_n[x]$.

11 *(a) La fonction* $t\mapsto\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ *est continue sur* $]-1,1[$ *et équivalente au voisinage de 1 à* $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$. *Elle est donc intégrable sur* $[0,1]$ *et l'application* $(P,Q)\to\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ *est bien définie. C'est facile de voir que c'est une fbs positive. De plus si* $(P|P)=0$ *alors* $P(t)=0$ *pour tout* $t\in]-1,1[$ *c'est donc le polynôme nul car il admet une infinité de racines.*
(b) On pose $T_n=\int_0^1\frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}}dt$ *pour* $n\in\mathbb{N}$. *Pour* $n=0$, *on a* $T_0=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$. *Pour* $n\geq 1$ *une intégration par partie nous conduit à* $T_n=(2n-1)(T_{n-1}-T_n)$, *donc* $T_n=\frac{2n-1}{2n}T_{n-1}=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}T_0=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$.
(c) On orthonormalise la base $(1,X,X^2)$ *de* $\mathbb{R}_2[X]$. *On trouve* $P_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $P_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}X$, $P_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2X^2-1)$.

12. *(a) On vérifie par récurrence que* $\forall k\in\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty}t^ke^{-t}dt=k!$, *donc l'application*

$(\cdot|\cdot)$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}[X]$*, ensuite on montre facilement que c'est un produit scalaire.*
(b) On utilise le procédé de Gram)Schmidt sur la base $(1, X, X^2, X^3)$ *de* $\mathbb{R}_3[X]$*. On trouve* $P_0 = 1$*,* $P_1 = X - 1$*,* $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 4X + 2)$*,* $P_3 = \frac{1}{6}(X^3 - 9X^2 + 18X - 6)$*. La famille* (P_0, P_1, P_2, P_3) *est donc une bon de* $\mathbb{R}_3[X]$*.*
(c) (P_0, P_1, P_2) *est une bon de* $\mathbb{R}_2[X]$ *et* $d(P, \mathbb{R}_2[X]) = \|P - p_{\mathbb{R}_2[X]}(P)\| = 6$*.*

13. *On a* $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2(\ln(x) - ax - b)^2 dx = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x\ln(x) - ax^2 - bx)^2 dx$*. On considère l'espace vectoriel* $E = \mathcal{C}([0,1])$ *des fonction continue sur* $[0,1]$ *et on le munit du produit scalaire* $(f,g) \mapsto (f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$*. On note* f_0 *la fonction définie sur* $[0,1]$ *par* $f_0(x) = x\ln(x)$ *si* $x \in]0,1]$ *et* $f_0(0) = 0$*. La fonction* f_0 *est bien continue en* 0 *car* $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$*, d'où* $f_0 \in E$*. Avec ces notation, il s'agit de calculer donc* $d(f_0, F)^2 = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|f_0 - ax^2 - bx\|^2$ *avec* $F = Vect\{x, x^2\}$*.* F *est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et de base* (x, x^2)*. On l'orthonormalise avec le procédé de Gram-Schmidt et on obtient* $(f_1 = \sqrt{3}x, f_2 = \sqrt{5}(4x^2 - 3x))$*. La projection orthogonale de* f_0 *sur* F *est* $q = (f_0|f_1)f_1 + (f_0|f_2)f_2 = \frac{5}{3}x^2 - \frac{19}{12}x$*. Donc* $d(f_0, F)^2 = \|f_0 - (f_0|f_1)f_1 - (f_0|f_2)f_2\|^2 = \|f_0\|^2 - \|q\|^2 = \frac{2}{27} - \frac{31}{432} = \frac{1}{432}$*.*

14. $\|e_k\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i|e_k)^2 = (e_k|e_k)^2 + \sum_{i\neq k}^n (e_i|e_k)^2$ *..., donc la famille est orthogonale et par conséquent libre. Ensuite on montre que* $\forall x \in E$*,* $x = \sum_{k=1}^n (e_i|x)e_i$*.*

19. $u = i + j + k$ *est orthogonal à* P*, donc* $p_P(x) = x - \frac{\langle x;u\rangle}{\|u\|^2}u$ *et*

$$Mat_B(p_P) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

20. $u = i - k$ *est orthogonal à* P*, donc* $s_P(x) = x - 2\frac{\langle x;u\rangle}{\|u\|^2}u$ *et*

$$Mat_B(s_P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

21. $A = Mat_B(p)$ *vérifie* $A^2 = A$*, c'est donc un projecteur. On calcul* $\mathbf{Ker}\, p$ *et* $\mathbf{Im}\, p$ *et on montre qu'il sont supplémentaires orthogonaux.* p *est donc la projection orthogonal sur le plan* $\mathbf{Im}\, p = \{(x,y,z);\ x + 2y - z = 0\}$*.*