Algèbre bilinéaire – Feuille 2

Formes bilinéaires

Exercice 1. Soit la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$,

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_3$$

(a) Ecrire la forme quadratique q associée à φ.
(b) Ecrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(c) La forme φ est-elle définie positive?

Exercice 2. Déterminer la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la matrice de la forme bilinéaire symétrique φ telle que pour $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (-1,2,0)$, $v_3 = (1,0,1)$, on ait

$$\varphi(v_1,v_1) = 5,\ \varphi(v_1,v_2) = 0,\ \varphi(v_1,v_3) = -1,\ \varphi(v_2,v_2) = 1,\ \varphi(v_2,v_3) = 4,\ \varphi(v_3,v_3) = 0.$$

Exercice 4. Montrer que l'application $q : P \mapsto \int_0^1 P(t)P''(t)dt$ définie une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$ et trouver sa forme polaire.

Exercice 5. (a) Vérifier que $\varphi(A,B) \mapsto \mathbf{tr}({}^tAB)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $M_n(\mathbb{R})$.
(b) On suppose $n = 2$. Quelle est sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\ell_1, \ell_2 \in E^*$.
(a) Montrer que l'application $q : \mathbf{x} \mapsto \ell_1(\mathbf{x})\ell_2(\mathbf{x})$ est une forme quadratique sur E et trouver sa forme polaire.
(b) On suppose que (ℓ_1, ℓ_2) est libre.

(i) Montrer que q peut s'écrire comme différence de deux carrés de formes linéaires indépendantes.
(ii) On suppose que $E = \mathbb{K}^n$. Donner la matrice de q dans la base canonique de E.
(c) Soit q une forme quadratique sur E telle que $H := \{x \in E,\quad q(x) = 0\}$ est un hyperplan. Montrer que q est le produit de deux formes linéaires sur E.

Exercice 7. Montrer que si q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, alors sa forme polaire φ est donnée par

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_j}(x)y_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial y_i}(y)x_i.$$

Application : Déterminer la forme polaire de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$,

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Exercice 8. **[CPU]** Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2$$

avec $p + q \leq n$.
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tel que $q_{|F}$ soit définie positive.
Montrer que $\dim(F) \leq p$.

Exercice 9. **[CPU]** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et considérons la forme quadratique q_α sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$q_\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \alpha(\sum_{j=1}^{n} x_j)^2.$$

Donner des conditions sur α pour que q_α soit définie positive.

Exercice 10. Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$ des entiers deux à deux distincts. Pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{a_i + a_j}$.
Montrer que q est une forme quadratique définie positive.

Exercice 11. **[CPU]** Soit q une forme quadratique non nulle sur $M_2(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall A, B \in M_2(\mathbb{C}), \;\; q(AB) = q(A)q(B).$$

(a) Montrer que q s'annule sur le complémentaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
(b) Montrer que q coïncident avec le déterminant.

Exercice 12. **[Partiel 2017/8]** Soit E un espace préhilbertien réel munit du produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ et $a \in E$ un vecteur de nome 1. On définit l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle + \lambda\langle x, a\rangle\langle a, y\rangle$$

où λ est un nombre réel non nul.
(a) Montrer que si φ est un produit scalaire alors $1 + \lambda > 0$.
(b) Réciproquement, montrer que si $1 + \lambda > 0$, alors φ est un produit scalaire. (On distinguera le cas où $\lambda \geq 0$ et le cas où $-1 < \lambda < 0$ et dans ce dernier cas on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exercice 13. Dans chacun des cas suivant, écrire la matrice de la forme quadratique dans la base canonique, la réduire et déterminer son rang et sa signature.
(a) $q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 + 7x_2x_3$.
(b) $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$
(c) $q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
(d) $q(\mathbf{x}) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$

Exercice 14. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

(a) Ecrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
(b) Réduire dans les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.

Exercice 15. [Incontournable] Soit la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique.
(b) Déterminer deux formes réelles linéairement indépendantes ℓ_1 et ℓ_2 telles que $q = \ell_1^2 - \ell_2^2$.
(c) Déterminer une forme linéaire ℓ_3 (aussi simple que possible) telle que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) soit une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.
(c) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) soit sa base duale.
(d) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q et une matrice inversible P telle que $D = {}^tPAP$ soit diagonale.

Exercice 16. [Incontournable] Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + (1+a)x_2^2 + (1+a+a^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3.$$

(a) Donner la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(b) Calculer le déterminant de A.
(c) Pour quelles valeurs de A la forme q est-elle non dégénérée?
(d) Réduire q et donner son noyau, son rang et sa signature en fonction de a.
(e) Déterminer une base orthogonale pour q.
(f) En déduire une matrice inversible telle que $D = {}^tPAP$ soit diagonale.

Exercice 17. Montrer que $q : A \mapsto \mathbf{tr}({}^tAA)$ est une forme quadratique définie positive sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18. Montrer que $q : A \mapsto \mathbf{tr}(A)^2$ est une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$. Est-elle positive? définie positive?
Exercice 19. Montrer que $q : A \mapsto \mathbf{tr}(A^2)$ est une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$, déterminer sa signature et son rang.

Indications/Réposes

4. $\varphi(P,Q) = \frac{1}{4}(q(P+Q) - q(P-Q)) = \frac{1}{2}\int_0^1 P(t)Q''(t) + P''(t)Q(t)dt$.

5. *(a) Vu en cours.*

(b) Utiliser la base canonique $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ *de* $M_2(\mathbb{R})$ *et calculer* $\varphi(E_{i,j}, E_{k,\ell})$. *On trouve* $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_4$.

6. *(a)* $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - (x-y)) = \frac{1}{2}(\ell_1(x)\ell_2(y) + \ell_1(y)\ell_2(xy))$.

(b)(i) $q(x) = \frac{1}{4}(\ell_1(x) + \ell_2(x))^2 - \frac{1}{4}(\ell_1(x) - \ell_2(x))^2$.

(b) (ii) Ecrire ℓ_1 *et* ℓ_2 *dans la base canonique de* $(\mathbb{K}^n)^*$ *et utiliser (i).*

(c) Justifier que $E = H \oplus \mathbb{R}a$ *où* $a \notin H$ *écrire tout élément* $\in E$ *dans cette décomposition.*

7. *Ecrire q dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$, $q(x) = \sum_{1 \leq qi,j \leq n} a_{i,j}x_ix_j$ *et calculer* $\frac{\partial q}{\partial x_k}(x)$.

8. *Montrer que F et* $Vect(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ *sont en somme directe.*

9. *Une matrice symétrique est définie positive ssi ses valeurs propres sont strictement positives. Etudier les valeurs propres de la matrice de q dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

10. *Montrer que* $\phi(f,g) = \int_{]0,1]} f(t)g(t)dt$ *est une fbs définie positive sur l'ensemble des fonctions continues sur* $]0,1]$ *et remarquer que* $\frac{1}{a_i+a_j} = \int_0^1 t^{a_i+a_j-1}dt$. *Ainsi si* $q(x) = 0$, *alors* $\sum_{i=1}^n x_it^{a_i-1/2} =$ *sur* $]0,1]$, *ce qui peut entraîner que* $\sum_{i=1}^n a_i^k x_i = 0$ *pour tout* $k \in \{0,, \ldots, n-1\}$. *Ce système linéaire homogène n'a qu'une seule solution car son déterminant, qui est un déterminant de Vandermonde en* $a_1, \ldots, a_n$, *est non nul.*

11 $q(I_2) = 1$ *et que si A et B sont semblables, alors* $q(A) = q(B)$. *On vérifie aussi que* $q(E_{1,2}) = q(E_{2,1}) = 0$. *Si A est la matrice nulle alors* $q(A) = 0$, *et si A est de rang 1, alors* $q(A) = 0$. *On en déduit que* $q(A) = 0$ *ssi* $det(A) = 0$

12. *(a) Calculer* $\varphi(a,a)$.

(b) Inégalité de Cauchy-Schwarz.

13. *(a) q est de signature* $(1,1)$, *(b) q est de signature* $(2,1)$, *(c) q est de signature* $(3,0)$, *(d) q est de signature* $(1,2)$.

14. *(b) Pour* $n = 2$, *q est de signature* $(2,0)$. *Pour* $n = 3$ *q est de signature* $(3,0)$. *Pour* $n = 4$ *q est de signature* $(4,0)$.

15. *(b) Faire une réduction de Gauss.*

16. *(b)* $\det(A) = a(1+a^2)$. *(c) si* $a = 0$, *alors q est de rang* 2 *et de signature* $(2,0)$ *et pour* $a \neq 0$, *q est de rang 3 et de signature* $(3,0)$ *pour* $a > 0$ *et* $(2,1)$ *pour* $a < 0$.

17. *Fait en cours.*

18. *q est positive, mais pas définie positive. Chercher* $A \neq 0$, *tel que* $q(A) = 0$.

19. *Etudier la restriction de q à l'espace des matrices symétriques et à l'espace des matrices antisymétriques.* $\mathrm{Sgn}(q) = (\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$.