Algèbre bilinéaire – Feuille 1
# Formes linéaires, dualité

**Exercice 1.** Montrer qu'une forme linéaire non identiquement nulle sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est surjective.
*Indication 1. Pensez à l'mage comme sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}$

**Exercice 2.** Montrer que les familles de vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la base duale :
(a) $v_1 = (2, 1, 4)$, $v_2 = (3, 2, 3)$, $v_3 = (-1, -1, 2)$.
(b) $v_1 = (0, -1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (-1, 1, 1)$.
(c) $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1)$, $v_3 = (1, -1, 2)$.
*Indication 2.* Pensez à la formule de changement de bases $Mat_{\mathcal{B}_0^*}(\mathcal{B}^*) = {}^t(Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}))^{-1}$.
*Réponse 2.* (a) $\ell_1 = 7e_1^* - 9e_2^* - e_3^*$, $\ell_2 = -6e_1^* + 8e_2^* + e_3^*$, $\ell_3 = -5e_1^* + 6e_2^* + e_3^*$.
(b) $\ell_1 = -e_1^* - e_2^*$, $\ell_2 = -e_2^* + e_3^*$, $\ell_3 = -e_1^* - e_2^* + e_3^*$.
(c) $\ell_1 = \frac{5}{2}e_1^* + \frac{1}{2}e_2^* - e_3^*$, $\ell_2 = \frac{1}{2}e_1^* + \frac{1}{2}e_2^*$, $\ell_3 = -\frac{3}{2}e_1^* - \frac{1}{2}e_2^* + e_3^*$.

**Exercice 3.** Déterminer la base duale de la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
*Indication 3.* Pensez à la formule $x \in E,\ \ x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i$,

**Exercice 4.** $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $n$ un entier naturel non nul et les $n+1$ scalaires $x_0, x_1 \dots, x_n$ de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
(a) Montrer que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ de polynômes définis par

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

est une base de $E = \mathbb{K}_n[X]$.
(b) Déterminer sa base duale.
(c) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que les points $x_i$ sont dans un intervalle $[a, b]$. Montrer que'il existe des constantes réelles uniquement déterminées $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ telles que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \quad \int_a^b P(t)dt = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P(x_j).$$

Détailler le cas où $n = 2$, $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$, pour obtenir la formule de Simpson (ou formule des trois niveaux),

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x], \quad \int_a^b P(t)dt = \frac{b-a}{6}[P(a) + 4P(\frac{a+b}{2}) + P(b)].$$

⊛ Indication : Pour (b) et (c) Pensez à la formule $x \in E,\ \ x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i$,

**Exercice 5.** Déterminer la forme linéaire $\varphi$ sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\varphi(1,1,1)=0$, $\varphi(2,0,1)=1$ et $\varphi(1,2,3)=4$.

**Exercice 6.** Soient $\varphi_1$, $\varphi_2$ les deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\varphi_1(x,y)=x+y, \quad \varphi_2(x,y)=x-y.$$

(a) Montrer que $(\varphi_1,\varphi_2)$ est une base de $(\mathbb{R}^2)^*$ et déterminer la base dont elle est la duale.

(b) Exprimer, dans la base $(\varphi_1,\varphi_2)$, les formes linéaires

$$\phi(x,y)=x, \quad \psi(x,y)=x-3y.$$

**Exercice 7.** Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension 3 et $(e_1,e_2,e_3)$ une base de $E$. Soient $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ les formes linéaires sur $E$ définies par

$$\varphi_1=2e_1^*+e_2^*+e_3^*, \;\; \varphi_2=-e_1^*-e_3^*, \;\; \varphi_3=e_1^*+3e_2^*.$$

Montrer que $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est une base de $E^*$ et déterminer la base dont elle est la duale.
*Indication 7.* Pensez à la formule de changement de bases $Mat_{\mathcal{B}_0^*}(\mathcal{B}^*)={}^t(Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}))^{-1}$.

**Exercice 8.** Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$ et considérons les formes linéaires $\varphi_j$ $(0\leq j\leq 3)$ sur $E$ définies par

$$\forall P\in E, \;\; \varphi_j(P)=P(j).$$

Montrer que la famille $(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est une base de $E^*$ et déterminer la base dont elle est la duale.
*Indication 8.* Pensez aux relations (d'orthogonalité) de Kronecker ou à la formule de changement de bases.

**Exercice 9.** Soient $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ les formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$ définies par

$$\varphi_1(P)=P(1), \;\; \varphi_2(P)=P'(1), \;\; \varphi_2(P)=\int_0^1 P(t)dt.$$

Montrer que la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]^*$ et déterminer la base dont elle est la duale.
*Indication 9.* Pensez à la formule de changement de bases.

**Exercice 10.** **[CPU]** Soient $E,F$ deux espaces vectoriels, l'espare $E$ étant de dimension finie, et $u\in\mathcal{L}(E,F)\setminus\{0\}$. Montrer que $u$ est de rang $r$ si, et seulement si, il existe des formes linéaires $\varphi_1,\ldots,\varphi_r$ linéairement indépendantes dans $E^*$ et des vecteurs $y_1,\ldots,y_r$ linéairement indépendants dans $F$ tels que $u=\sum_{i=1}^r \varphi_i y_i$. Montrer que dans ce cas on $\mathbf{Ker}(u)=\cap_{i=1}^r \mathbf{Ker}(\varphi_i)$.
*Indication 10.* Prendre une base de $\mathbf{Im}(u)$.

**Exercice 11.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient $\phi,\varphi\in E^*$ telles que $\mathbf{Ker}(\phi)=\mathbf{Ker}(\varphi)$. Montrer qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\phi=\alpha\varphi$.
*Indication 11.* Si $\phi=0$ : ok. Sinon choisir $v\in E$ tel que $\mathrm{Vect}(v)$ et $\mathbf{Ker}(\phi)$ soient supplémentaires (pensez à l'exercice 1).

**Exercice 12.** **[CPU]** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si $,\varphi,\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ sont des formes linéaires sur $E$ qui vérifient $\cap_{i=1}^p \mathbf{Ker}(\varphi_i)\subset\mathbf{Ker}(\varphi)$, alors $\varphi$ est une combinaison linéaire des $\varphi_i$.
*Indication 12.* Si les $\varphi_i$ sont non nulles, les compléter en une base de $E^*$.

**Exercice 13.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $x, y \in E$. Montrer que $x = y$ si et seulement si, pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi(x) = \varphi(y)$.
*Indication 13.* L'implication directe est évidente. Pour la réciproque, on suppose $x \neq y$ et on construit une forme linéaire $\varphi \in E^*$, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ en distinguant le cas où de la famille $\{x, y\}$ est libre et le cas où elle est liée.
**Exercice 14.** **[CPU]** Soit $\varphi$ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda \mathbf{tr}$
*Indication 14.* Appliquer la relation sur les vecteurs de la base canonique (des matrices élémentaires) $\{E_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n\}$ de $M_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 15.** **[CPU]** (a) Soit $\varphi$ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \mathbf{tr}(AM)$.

(b) En déduire que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible.

*Indication 15.* Montrer que la famille des formes linéaire $T_{i,j}(M) = \mathbf{tr}(E_{i,j}M)$ est une base de $M_n(\mathbb{R})^*$.